UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 — Cours: O. Kravchenko
Institut Camille Jordan — Travaux dirigés: T. Altınel, T. Eisenkölbl & S. Richard

Math IV, analyse (L2) – Fiche 7

21 avril 2008

Exercice 1.
On considère l'application

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & x^3 - 2xy + 2y^2 - 1 \end{array}$$

1. Montrer que le théorème des fonctions implicites s'applique au point $(1,1)$.

2. Trouver la pente de la tangente à la courbe d'équation $f(x,y) = 0$ au point $(1,1)$ et préciser la position de la courbe par rapport à sa tangente en ce point.

Exercice 2.
On considère l'application

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & \arctan(x+y) + e^x - 2y - 1 \end{array}$$

1. Montrer que le théorème des fonctions implicites s'applique en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$ qui satisfait $f(x,y) = 0$.

2. Soit ϕ l'application qui exprime la deuxième coordonnée en fonction de la première au voisinage de $x = 0$ et dont l'existence est justifiée par le théorème des fonctions implicites. Calculer le développement limité de ϕ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Exercice 3.
Quitte à adapter les hypothèses aux nouvelles dimensions, le théorème des fonctions implicites est valable pour les applications de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}$ suffisamment différentiables. Par ailleurs, la fonction implicite dont il démontre l'existence vérifie les mêmes conditions de dérivabilité que l'application initiale.

0. Enoncer le théorème des fonctions implicites sous la forme la plus générale que vous puissiez imaginer.

Dans la suite, nous étudierons l'application

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y,z) & \longmapsto & x^2 - xy^3 - y^2z + z^3 \end{array}$$

au point $(1,1,1)$.

1. Vérifier que le théorème des fonctions implicites s'applique en ce point et que par conséquent il existe un voisinage O dans $\mathbb{R}^2$ du point $(x,y) = (1,1)$, un intervalle ouvert I contenant $z = 1$ et une fonction g de O vers I telle que $z = g(x,y)$ si et seulement si $f(x,y,z) = 0$. En particulier $g(1,1) = 1$.

Nous utiliserons g pour étudier la surface $f(x,y,z) = 0$ au voisinage de $(1,1,1)$.

2. Déterminer l'équation du plan tangent à la surface $f(x, y, z) = 0$ en $(1, 1, 1)$.

3. En adaptant la méthode du premier exercice à ce nouveau contexte écrire le développement limité de g au voisinage de $(1, 1)$ à l'ordre 2. N'oubliez pas de vérifier que le théorème de Schwarz est applicable.

4. Déterminer la matrice hessienne de g au point $(1, 1)$. Le point $(1, 1)$ n'est pas un point critique mais vous pouvez utiliser les méthodes de détermination des extrema locaux pour décider de quel côté du plan tangent se trouve la surface. Quelle est votre réponse ?

5. *Pour les curieux qui ont aussi de l'audace* : généraliser la méthode des points précédents à toutes les dimensions en introduisant une notion de plan tangent à une surface dans $\mathbb{R}^p$ à un point donné, et en définissant les notions d'être d'un côté ou de l'autre de ce plan. L'algèbre linéaire est utile.

Exercice 4.
La *spirale logarithmique* est définie par l'application

$$\begin{array}{rccl} \gamma & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \longmapsto & (e^{at}\cos t, e^{at}\sin t). \end{array}$$

Dans cet exercice nous supposerons $a \in \mathbb{R}_+^*$. On posera $x(t) = e^{at}\cos t$ et $y(t) = e^{at}\sin t$.

1. Dessiner la spirale logarithmique. Pour vous guider, répondez aux questions suivantes :
   1.1 Calculer les valeurs de t pour lesquelles $x(t) = 0$. Résoudre la même question pour y.
   1.2 Déterminer la pente de la tangente aux valeurs de t trouvées dans le point précédent.
   1.3 Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la pente de la tangente s'annule.
   1.4 Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la pente de la tangente n'est pas définie.
2. Calculer la longueur de l'arc entre $\gamma(0)$ et $\gamma(t)$.
3. Montrer que $\gamma(t) \mapsto (0, 0)$ quand $t \mapsto -\infty$.
4. Montrer que la longueur de l'arc entre 0 et t a une limite finie quand $t \mapsto -\infty$.
5. Montrer que la tangente à la spirale logarithmique en tout point de celle-ci fait un angle constant avec la droite joignant ce point à l'origine.