UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 — Cours: O. Kravchenko
Institut Camille Jordan — Travaux dirigés: T. Altınel, T. Eisenkölbl & S. Richard

Math IV, analyse (L2) – Fiche 8

28 avril 2008

Exercice 1.
On considère la fonction $f :]0,\infty[\times]0,\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^y - y^x$.

1. Représenter graphiquement les points de la courbe $\Gamma := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\}$.
2. Quels sont les points de Γ où le théorème des fonctions implicites ne s'applique pas ?

Exercice 2 (Reprise de la fiche 7).
La *spirale logarithmique* est définie par l'application

$$\begin{array}{rcrcl} \gamma & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \longmapsto & (e^{at}\cos t, e^{at}\sin t). \end{array}$$

Dans cet exercice nous supposerons $a \in \mathbb{R}_+^*$. On posera $x(t) = e^{at}\cos t$ et $y(t) = e^{at}\sin t$.

1. Dessiner la spirale logarithmique. Pour vous guider, répondez aux questions suivantes :
   1.1 Calculer les valeurs de t pour lesquelles $x(t) = 0$. Résoudre la même question pour y.
   1.2 Déterminer la pente de la tangente aux valeurs de t trouvées dans le point précédent.
   1.3 Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la pente de la tangente s'annule.
   1.4 Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la pente de la tangente n'est pas définie.
2. Calculer la longueur de l'arc entre $\gamma(0)$ et $\gamma(t)$.
3. Montrer que $\gamma(t) \mapsto (0,0)$ quand $t \mapsto -\infty$.
4. Montrer que la longueur de l'arc entre 0 et t a une limite finie quand $t \mapsto -\infty$.
5. Montrer que la tangente à la spirale logarithmique en tout point de celle-ci fait un angle constant avec la droite joignant ce point à l'origine.

Exercice 3.
Paramétrer la courbe dans $\mathbb{R}^2$ d'équation $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$.

Exercice 4.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Calculer les intégrales $\int_\gamma f \ \mathrm{d}s$ dans les cas suivants, en parcourant toujours les chemins dans le sens positif, c'est-à-dire dans le sens inverse des aiguilles d'une montre :

1. $f(x,y) = x^2 + y^3$ et γ est le bord du triangle de sommets $(0,0), (1,0)$ et $(0,1)$,
2. $f(x,y) = x^2 + y^2$ et γ est le cercle de centre $(1,1)$ et de rayon 2.
3. $f(x,y) = xy$ et γ est le quart d'ellipse d'équation $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ situé dans le quart de plan $\{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$.

Exercice 5.
Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs défini pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$ par

$$F(x, y) = (2xy, x^2 + y^2) \ .$$

Calculer l'intégrale de ce champ de vecteurs le long des arcs orientés suivants :

1. Le segment orienté d'origine $(0, 0)$ et d'extrémité $(1, 1)$,
2. L'arc de parabole d'équation $y = x^2$, du point $(0, 0)$ au point $(1, 1)$.

Quelle conjecture en déduisez-vous ? Démontrer votre affirmation.

Exercice 6.
Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_C (2x - y)\ \mathrm{d}x + (x + y)\ \mathrm{d}y$$

où C est le cercle de centre 0 et de rayon R, considéré avec l'orientation directe.