

Math IV, analyse (L2) – Fiche 9

5 mai 2008

Exercice 1 (Hélice).

L'hélice circulaire à pas constant est définie par l'application suivante :

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \\ z = ht \end{cases} \end{aligned}$$

avec $r, h \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que le vecteur tangent à l'hélice en tout point de celle-ci fait un angle constant avec le vecteur vertical $(0, 0, 1)$.
2. Calculer la longueur d'une spire de l'hélice ($t \in [0, 2\pi]$).

Exercice 2 (Hélice 2).

Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{\Gamma} (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz$$

où Γ est l'arc de l'hélice circulaire paramétrée par $(r \cos(t), r \sin(t), ht)$, avec $r, h \in \mathbb{R}_+^*$ fixés et $t \in [0, 2\pi[$.

Exercice 3 (Intégrale 2 dim).

(1) Calculer $\iint_D (x - y) dx dy$ où D est la partie du plan délimitée par les droites d'équation :

$$x = 0, \quad y = x + 2, \quad y = -x$$

(2) Calculer $\iint_D xy dx dy$ où D est la partie du plan délimitée par les courbes d'équation :

$$y = x^2, \quad y = x^3.$$

(3) Calculer $\iint_D e^{x+y} dx dy$ sur le carré $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$.

Exercice 4 (Intégrale 3 dim).

Calculer l'intégrale $\iiint_D (x + y + z)^2 dx dy dz$, où D est la partie de l'espace délimitée par les plans d'équation :

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + y + z = 1.$$

Exercice 5 (cycloïde).

Une *cycloïde* est définie par la courbe paramétrée suivante :

$$\begin{cases} x(t) = a(t - \sin t) \\ y(t) = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} .$$

1. Représenter aussi précisément que possible une arche de la cycloïde ($t \in [0, 2\pi]$).
2. Déterminer l'aire de la surface délimitée par une arche de la cycloïde et l'axe des x .

Exercice 6 (Entraînement).

Calculer l'intégrale curviligne $\int_{\Gamma} -y \, dx + x \, dy$, où Γ est l'intersection de la sphère de centre $(0, 0, 0)$ et de rayon 1, et du plan d'équation $x + y + z = 1$, en indiquant le sens choisi du parcours.