UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 Cours: O. Kravchenko
Institut Camille Jordan Travaux dirigés: T. Altınel, T. Eisenkölbl & S. Richard

Math IV, analyse (L2) – Fiche 1

25 février 2008

Exercice 1 (Ouvert / fermé, intérieur et frontière).
Etablir si les ensembles suivants sont ouverts et/ou fermés (ou bien ni ouverts ni fermés). Déterminer également les points intérieurs de ces ensembles ainsi que leur frontière. Dans chacun des exemples, faire un dessin représentant la région concernée.

un singleton dans $\mathbb{R}$,
une partie finie de $\mathbb{R}$,
$\mathbb{N}$ (vu comme sous-ensemble de $\mathbb{R}$),
$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}[0,\ 1-\frac{1}{n}]$,
$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z>2\}$,
$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2<1 \text{ et } (x-\frac{1}{2})^2+y^2\geq\frac{1}{16}\}$,
$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=x^2\}$,
$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<|x|<|y|<1\}$,
$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+\big(y-\frac{1}{n}\big)^2\leq\frac{1}{4n^2}\}$.

Exercice 2.
1) Montrer que tout ensemble peut être muni d'une métrique. En déduire qu'il existe des espaces métriques qui ne sont pas normés.

2) Soit d une mérique sur un ensemble E. Montrer que d' définie pour tout $x,y\in E$ par

$$d'(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

est également une métrique sur E. Montrer également que cette métrique est strictement bornée par 1, c'est-à-dire $d'(x,y)<1$ quelque soit $x,y\in E$.

Exercice 3 (Normes équivalentes sur $\mathbb{R}^n$).
On considère les trois applications de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ définies pour tout $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ par :

$$\|x\|_2=\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2},\qquad \|x\|_\infty=\max_{j=1,\dots,n}|x_j|,\qquad \|x\|_1=\sum_{j=1}^n|x_j|.$$

1. Vérifier que ces applications définissent des normes. <u>Indication</u> : Pour $\|\cdot\|_2$, en vérifiant l'inégalité triangulaire, vous pouvez utiliser sans preuve le *lemme de Schwartz*, à savoir : *Si* $n\in\mathbb{N}^*$, $(a_1,\dots,a_n)$, $(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n$, *alors*

$$|\sum_{i=1}^n a_ib_i|\leq\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$$

2. Dessiner la boule unité B_j dans $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|\cdot\|_j$ pour $j\in\{2,\infty,1\}$, et montrer que ces trois normes sont équivalentes.

Exercice 4 (Notion de voisinage).
Soit x un point de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'une fonction f vérifie une certaine propriété *dans un voisinage de* x si cette propriété est satisfaite au moins dans un ensemble ouvert contenant x. Etablir si les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes sont positives dans un voisinage de l'origine :

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} + x\sin(1/x), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Etablir si les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes sont définies dans un voisinage de l'origine :

$$f(x,y) = \sqrt{x+y+1}, \qquad f(x,y) = \ln\big(\sin(x^2+1)\big).$$

Exercice 5 (Entraînement).
1) Montrer que l'application suivante définit une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{cccc} N : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & |x+y| + |x| \end{array}$$

2) Tracer la boule unité autour de l'origine par rapport à cette norme.