Maths IV, Analyse (Printemps 2011) – Fiche 2

(1) Soit (x_0, y_0) € ℝ² un point arbitraire. Calculer, lorsque la limite existe,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

Pour la fonction suivante :

$$f: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \to \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} & \text{Si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

A chaque $(x_0, y_0) \neq (0,0)$, comme f est « construite » à partir des fonctions simples, $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0) = \frac{{x_0}^2}{{x_0}^2+{y_0}^2}$

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\neq(0,0)}} \frac{x^2}{x^2+y^2}$

On prend f(0,y) = 0 ∀ y € R
On prend f(x,0) = 1 ∀ x € R
$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x=0\\y\neq 0}} f(x,y) = 0$
On pose y = x $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$
Il n'y a pas de limites en ce point.
On peut poser

X = r cos t
Y = r sin t
Coordonnées polaires
Alors $\frac{x^2}{x^2+y^2} = \frac{(\mathrm{r}\cos \mathrm{t})^2}{(\mathrm{r}\cos\mathrm{t})^2+(\mathrm{r}\sin\mathrm{t})^2} = (\cos \mathrm{t})^2$ car r € $\mathbb{R}_+^*$ donc pas de limite (car la limite dépend de t)

(2) Déterminer les limites suivantes quand elles existent :
(a)

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

On peut poser x = r cos t y = r sin t
$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{r^2 \sin t \cos t}{r^2}$ = sin t cos t = $\frac{\sin(2t)}{2}$
donc pas de limite.

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x}{y}$

  si x= y alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x}{y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x}{x} = 1$
  et si x= 0 et y = 1 alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x}{y} = 0$ ce n'est pas la même limite donc pas de limite.

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2+1} = \frac{1}{0^2+0^2+1} = 1$

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{x^3-y^3}{x^2+2y^2}\right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x^3-y^3|}{x^2+2y^2} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x^3-y^3|}{x^2+y^2} =$
  $\lim_{r\to 0} r(|\cos^3 t| + |\sin^3 t| \quad) = 0.$

- $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+y)}{(x+y)^2-1}$ On pose x+ y = 1+ u avec u → 0
  $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+y)}{(x+y)^2-1} = \lim\limits_{u\to 0} \frac{\ln(1+u)}{u(u+2)} = \lim\limits_{u\to 0} \frac{u+o(u)}{u(u+2)} = \lim\limits_{u\to 0} \frac{u}{u(u+2)} = \frac{1}{2}.$

  $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{x^{\frac{1}{3}}y^2}{x^2+y^2+|x-y|}\right| \leq \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|x^{\frac{1}{3}}\right|y^2}{x^2+y^2+|x-y|} = \lim\limits_{r\to 0} |r\, cos^2t|sin^2t \leq$
  $\lim\limits_{r\to 0} |r| = 0$

- y= 0 ➔ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^y = 1$
  y= 0 1 ≠ e
  y=$\frac{1}{\ln x}$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{1}{\ln x}\ln x} = 1$
  x → 0^+ ➔ $\ln x \to -\infty$
  ➔ y → 0

(b)

- $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-y}{x-y^2}$

  On pose y = x ➔ $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-y}{x-y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \frac{x^2-x}{x-x^2} = -1$

  y = x² ➔ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \frac{0}{x-x^4} = 0$

- $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x^2-y}{x-y^2}$ on pose x = 1
  $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x^2-y}{x-y^2} = \lim\limits_{y\to -1} \frac{1-y}{1-y^2} = \lim\limits_{y\to -1} \frac{1}{1+y}.$

  y ≠ -1 ➔ pas de limite.

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y}{x-y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r^2cos^2t-r\,sint}{r\cos t-r^2sin^2t}$

  coordonnées polaires en général.
  $\begin{cases} x-a = r\cos t \\ y-b = r\sin t \end{cases}$

- $\lim\limits_{||(x,y)||\to+\infty} f(x,y)$ ➔ |x| → + ∞
  ou |y| → +∞

(c) $\lim\limits_{||(x,y)||\to+\infty} \frac{x\arctan y}{x^2+y^2+1} = \lim\limits_{\substack{||(x,y)||\to+\infty \\ =r\to+\infty}} \frac{r\cos t\arctan(r\sin t)}{r^2+1}$

$\lim\limits_{\substack{||(x,y)||\to+\infty \\ x=0}} \frac{x^2+y^4}{x^4+y^2}$ = + ∞ $\lim\limits_{\substack{||(x,y)||\to+\infty \\ y=0}} \frac{x^2+y^4}{x^4+y^2}$ = 0 pas de limite.

$\lim\limits_{||(x,y)||\to+\infty} (1+|x|+|y|)\sin(y^2)$

On prend la norme$||\ ||_1$
||(x,y)|| = (x) + (y)
Donc

	$\underline{+}\ \infty$ si $y^2 \neq k\pi$	$k \in N$
Lim =	0 si $y^2 = k\pi$	$k \in N$

⇨ Pas de limite.