Maths IV, Analyse (Printemps 2011) – Fiche 2 (suite)

Exercice2 (Limites suivant divers chemins)

On définit f : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par : pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4 - 2x^2y + 3y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1/ Etudier, pour tout m € $\mathbb{R}$,la limite quand $(x,y) \to (0,0)$ de la restriction f à la droite d'équation y = mx.

Posons y = mx.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2y}{x^4 - 2x^2y + 3y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3m}{x^4 - 2x^3m + 3(mx)^2}$$

Si m = 0, alors $\frac{x^3m}{x^4 - 2x^3m + 3(mx)^2} = 0$ pour tout x € $\mathbb{R}$

⇨ $\lim_{x\to 0} f(x, mx) = 0.$

Si m ≠ 0, alors

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3m}{x^4 - 2x^3m + 3(mx)^2} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ (x\neq 0)}} \frac{xm}{x^2 - 2xm + 3m^2} = 0$$

2/ Calculer la limite à l'origine de la restriction de f à la parabole d'équation y = x²

Posons y = x².

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2y}{x^4 - 2x^2y + 3y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4 - 2x^4 + 3x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$$

3/ Montrer que f n'a pas de limite à l'origine.

On a trouver 2 limites différentes donc pas de limite en (0,0)

Exercice 3 :

Etudier la continuité sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions suivantes.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(x,y) \to \begin{cases} \dfrac{y}{x^2} e^{-\frac{|y|}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

<u>1er Cas :</u> Continuité en (x_0,y_0) avec $x_0 \neq 0$.

Au voisinage de (x_0,y_0), la fonction est définie par $f(x,y) = \frac{y}{x^2} e^{-\frac{|y|}{x^2}}$

La fonction est « construite » par des fonctions simples.

$y \to y$ $\quad y \to |y|$

$x \to x^2$ $\quad t \to e^{-t}$

donc f est continue en (x_0,y_0) → produit et composition de fonction continues.

2ème Cas : Continuité en (0,b) avec b € $\mathbb{R}$

On s'intéresse à $\lim_{(x,y)\to(0,b)} \frac{y}{x^2} e^{-\frac{|y|}{x^2}}$

Si b ≠ 0

On pose t =$\frac{|y|}{x^2}$ (x ≠ 0) ➔ t € $\mathbb{R}_+$

Alors $\frac{y}{x^2} e^{-\frac{|y|}{x^2}}$ = te^{-t} si y >0

$-te^{-t}$ si y<0

On peut supposer t ≠ 0, donc t € $\mathbb{R}_+^*$

$\lim_{t\to+\infty} te^{-t}$ = 0 (b > 0)

$\lim_{t\to+\infty} -te^{-t}$ = 0 (b < 0)

t ➔ + ∞ car on a posé t = $\frac{|y|}{x^2}$ et $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|y|}{x^2}$ = + ∞

b = 0

$\lim_{(x,y)\to(0,0)}$ f(x,y)

y = x² ➔ $\lim_{x\to0} \frac{y}{x^2} e^{-\frac{|y|}{x^2}}$ = e^{-1} ≠ 0

f continue sur $\mathbb{R}$\{(0,0)}.

f : $\mathbb{R}^2$ ➔ $\mathbb{R}$

$$(x,y) \to \begin{cases} xy \ln \left|\frac{x}{y}\right| & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

1er cas : xy ≠ 0 règles générales.

2ème cas :

(0,0) ou (0,b) pour (x,y) € $\mathbb{R}^2$ tel que xy ≠ 0.

$$xy \ln\left|\frac{x}{y}\right| = xy(\ln|x| - \ln|y|) = xyln|x| - xyln|y|$$

En général,

$\lim_{t\to0^+} t\ln t$ = 0

(x,y) ➔ (0,0) (a≠0)

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{(x,y)\to(a,0)} x(y\ln|y|) = 0 \\ \\ \lim_{(x,y)\to(a,0)} y(x\ln|x|) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim = 0 - 0 = 0$$

Raisonnement symétrique pour la limite en (0,b) avec b ≠ 0

En (0,0) ; y(x ln |x|) ou x(y ln |y|)

Même raisonnement ➔ lim = 0 – 0 = 0

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \rightarrow \begin{cases} \cos(x+y) & \text{si } x+y \geq 0 \\ \mathrm{ch}(x+y) & \text{si } x+y < 0 \end{cases}$$

<u>1[er] cas :</u>

$x_0 + y_0 \neq 0$

règles générales :

$(x,y) \rightarrow x + y \rightarrow \cos$

$\qquad\qquad\qquad\quad \mathrm{ch}$

<u>2[ème] cas :</u>

$x_0 + y_0 = 0$

On constate que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x + y = x_0 + y_0 = 0$$

On pose t = x+ y

Donc,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \cos(x,y) = \lim_{t\to 0} \cos t = 1$$

et

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \mathrm{ch}(x,y) = \lim_{t\to 0} \mathrm{ch}\, t = 1$$