Maths IV, Analyse (Printemps 2011) – Fiche 3

Exercice 1 : (continuité : suite)
(1.) Etudier la continuité des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2.$$
$$(x,y) \to \begin{cases} \frac{e^{x^2y}-1}{xy} & \text{si } xy \neq 0 \\ x & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

1er cas :
xy ≠ 0 pas de problème, on applique les règles générales, f est bien continue.

2ème cas :
xy = 0 on prend les couples (a,0), (0,b) et (0,0)

- $(x,y) \to (a,0)$ a ≠0
  On donne le développement limité de $e^{x^2y} - 1$
  $e^{x^2y} - 1 = 1 + x^2y - 1 + o(x^2y) = x^2y + o(x^2y)$.
  on a alors :
  $$\lim_{(x,y)\to(a,0)} \frac{e^{x^2y}-1}{xy} = \lim_{(x,y)\to(a,0)} \frac{x^2y}{xy} = x$$
- $(x,y) \to (0,b)$ b ≠0
  $$\lim_{(x,y)\to(0,b)} \frac{e^{x^2y}-1}{xy} = \lim_{(x,y)\to(0,b)} \frac{x^2y}{xy} = x$$
- $(x,y) \to (0,0)$ b ≠0
  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2y}-1}{xy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{xy} = x$$

Donc f est continue.

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$
$$(x,y) \to \begin{cases} (x^2 + 3x + 2)\sin\left(\frac{\pi}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

1er cas :
y ≠ 0

2ème cas :
y = 0 pour une certaine valeur x = a
$(x^2 + 3x + 2)\sin\left(\frac{\pi}{y}\right)$
$(x^2 + 3x + 2) = (x+1)(x+2)$
$\lim_{(x,y)\to(a,0)} |x^2 + 3x + 2||\ \sin\left(\frac{\pi}{y}\right)|$

$\boxed{a = -1 \text{ ou } -2}$ ≤1

$\leq \lim_{(x,y)\to(a,0)} |x^2 + 3x + 2| = 0$

Commentaire [WU1]: = f(a,0)

(a,0) a≠-1, -2
Pas de limite

$\lim_{y\to 0} \sin(\frac{\pi}{y})$

sin $(\frac{\pi}{y} + k\pi) = \begin{cases} 1 \text{ si k est pair} \\ -1 \text{ si k est impair.} \end{cases}$

k € $\mathbb{Z}$

$\frac{\cancel{\pi}}{y} = \frac{\cancel{\pi}}{2} + k\cancel{\pi}$

$y = \frac{1}{\frac{1}{2}+k} = \frac{2}{2k+1}$

k → $\pm\infty$, sin

<u>En suivant 2 chemins :</u>

$(a, \frac{2}{2k+1})$ k pair → a² + a +1

$(a, \frac{2}{2k+1})$ k impair →-(a² + a +1)

$\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = \begin{cases} 1 \text{ k pair} \\ -1 \text{ k impair} \end{cases}$

<u>Cas 2 :</u>

f n'est pas continue en (a,0) si a≠-1 ou -2

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$
$$(x,y) \to \begin{cases} \frac{|x|^{\alpha1}|y|^{\alpha1}}{(|x|^{\beta1}+|y|^{\beta2})^{\gamma}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

On voudrait $|x|^{\beta1}+|y|^{\beta2}$ = u² + v²

u² = $|x|^{\beta1}$

v² = $|y|^{\beta2}$

Alors $|x|^{\alpha1} = u^{\frac{2\alpha1}{\beta1}}$ et $|y|^{\alpha1} = v^{\frac{2\alpha1}{\beta2}}$

$f(x,y) = \frac{u^{\frac{2\alpha1}{\beta1}} v^{\frac{2\alpha1}{\beta2}}}{(u^2+v^2)^{\gamma}}.$

On pose u = r cos t.

$f(x,y) = \frac{r^{2(\frac{\alpha1}{\beta1}+\frac{\alpha1}{\beta2})} cos^{\frac{2\alpha1}{\beta1}} t \ sin^{\frac{2\alpha1}{\beta2}} t}{(r^2)^{\gamma}}.$

$f(x,y) = r^{2(\frac{\alpha1}{\beta1}+\frac{\alpha1}{\beta2}-\gamma)} cos^{\frac{2\alpha1}{\beta1}} t \ sin^{\frac{2\alpha1}{\beta2}} t$

(←) On suppose $\frac{\alpha1}{\beta1} + \frac{\alpha1}{\beta2} > \gamma$

Alors $2(\frac{\alpha1}{\beta1} + \frac{\alpha1}{\beta2}) > 0$

⇨ $\lim_{r\to 0} |r^{2\left(\frac{\alpha1}{\beta1}+\frac{\alpha1}{\beta2}-\gamma\right)} cos^{\frac{2\alpha1}{\beta1}} t \ sin^{\frac{2\alpha1}{\beta2}} t| \leq \lim_{r\to 0} r^{2\left(\frac{\alpha1}{\beta1}+\frac{\alpha1}{\beta2}-\gamma\right)} = 0$

(→) On suppose $\frac{\alpha1}{\beta1} + \frac{\alpha1}{\beta2} \leq \gamma$

Si $\frac{\alpha1}{\beta1} + \frac{\alpha1}{\beta2} - \gamma = 0$

On calcule alors $\lim\limits_{r\to 0} cos^{\frac{2\alpha 1}{\beta 1}} t \;\; sin^{\frac{2\alpha 1}{\beta 2}} t$

Les limites dépendent du choix de t, donc du choix d'un chemin particulier.

t = $\frac{\pi}{2}$ → 0

t = $\frac{\pi}{4}$ → ≠0

-c = $\frac{\alpha 1}{\beta 1} + \frac{\alpha 1}{\beta 2} - \gamma < 0$

$\lim\limits_{r\to 0} \frac{(cos^{\frac{2\alpha 1}{\beta 1}} t \;\; sin^{\frac{2\alpha 1}{\beta 2}} t)}{r^c}$, c > 0. Pas limite

Exercice 4 : (Calcul différentiel : premiers pas).

Définition de la différentiel en un point de R^p

F : R^p → R^q et a € R^p

p = q=1

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$

⇔ $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)$ = 0

$\lim\limits_{h\to 0} [\frac{f(a+h) - f(a) - f'(a).h}{h}] = 0$

df(a) € L(R^p,R^q)

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{||f((a+h) - f(a) - df(a)h||_{R^q}}{||h||_{R^p}}$

1. Etudier si les fonctions suivantes sont différentiables en (0,0) :

f : $\mathbb{R}^2$ → $\mathbb{R}^2$.

(x,y) → $\begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x+y) \neq (0,0) \\ x & \text{si } (x+y) = (0,0) \end{cases}$

Pour répondre à cette question, il set nécessaire de savoir

$\frac{\delta f}{\delta x}(0,0) = \delta_1 f(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h}$ = $\lim\limits_{h\to 0} \frac{0-0}{h}$ = 0

$\frac{\delta f}{\delta y}(0,0) = \delta_2 f(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h}$ = $\lim\limits_{h\to 0} \frac{0-0}{h}$ = 0

Si f est différentiable en (0,0), sa différentielle sera la matrice [0 0]

$\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|f((0,0)+(h_1,h_2) - f(0,0) - df(0,0)\binom{h_1}{h_2})|}{||(h_1,h_2)||}$

= $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|\frac{{h_1}^3 h_2}{h_1^2+h_2^2} - 0 - [00]\binom{h_1}{h_2}|}{\sqrt{{h_1}^2+{h_2}^2}}$

= $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|h_1|^3 |h_2|}{(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}}$ = 0

$h_1 = r\cos t$

$h_2 = r\sin t$

f : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

(x,y) $\rightarrow \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x+y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x+y) = (0,0) \end{cases}$

f a des dérivées partielles en (0,0) mais elle n'y est pas différentiable.

2. Montrer que la fonction suivante est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$:

f : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

(x,y) $\rightarrow \begin{cases} \cos(x+y) & \text{si } x+y \geq 0 \\ \mathrm{ch}(x+y) & \text{si } x+y < 0. \end{cases}$

1er cas :

$x_0 + y_0 < 0$

$\frac{\delta f}{\delta x}(x_0,y_0) = \frac{\delta}{\delta x}\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{sh}(x_0 + y_0) = \frac{\delta f}{\delta y}(x_0,y_0)$

<u>2ème cas :</u>

$x + y = 0$

$\frac{\delta f}{\delta x}(x_0, -x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,-x_0) - f(x_0,x_0)}{h}$

$\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{\cos h - \cos 0}{h} = -\sin 0 = 0$

$\lim\limits_{h\to 0^-} \frac{\mathrm{ch}\, h - \mathrm{ch}\, 0}{h} = \mathrm{sh}0 = 0$