Maths IV, Analyse (Printemps 2011) – Fiche 5

Exercice 1 (quelques différentielles supplémentaires)

Soit $f : R^2 \rightarrow R$ une fonction différentiable en tout point de $R^2$. On définit en utilisant f, les fonctions u : $R \rightarrow R$ : $u(x) = f(x, -x)$ et

v : $R^2 \rightarrow R$ : $v(x,y) = f(y,x)$.

Déterminer leurs différentielles

$u(x) = f \circ g(x)$

g : $R \rightarrow R^2$

$x \rightarrow (x,-x)$

➔ $dg(x) = 1 -1$

$df(x,y) = dfdxdfdy$

$v(x) = f \circ h(x)$

h : $R^2 \rightarrow R^2$

$(x,y) \rightarrow (y,x)$

⇨ $dh(x,y) 0110$

⇨ $dfdy\ (y,x) + dfdx\ (y,x)$

⇨

⇨ la fonction t est différentiable sur $M_n(R)$

⇨

- ⇨ dt(A) = ( 1  0 … 0 N colonnes
- ⇨ N colonnes
- ⇨ N colonnes
- ⇨ Si $x > 0$
- ⇨ Si $x < 0$
- ⇨ = u
- ⇨ Car $x = - x$

- ⇨ 0 1 0 … 0 N colonnes
- ⇨ N colonnes
- ⇨ N colonnes
- ⇨ Si x >0
- ⇨ Si x <0
- ⇨ = u
- ⇨ Car x =- x

- … 0…01N colonnes
- N colonnes
- N colonnes
- Si x >0
- Si x <0
- = u
- Car x =- x
- $)_{1 \times n^2}$
-
- dt : $M_n(R) \rightarrow L(M_n(R), R)$
- A → (10…0 010…0 0….01)
- dt(A) (H) = tr(H)
-
- Exercice 4 : (Prolongeable, différentiable ?)
- On étudiera la fonction suivante :
- f : $R^2\backslash\{0,0\} \rightarrow R$

- $(x,y) \rightarrow xy\alpha x^2 + y^2$

-
- <u>Pour quelles valeurs de a, la fonction f se prolonge-t-elle par continuité en (0,0) ?</u>

limx,y→0,0 xyαx2+ y2

x=y =r

limx,y→0,0 r2α2r2 = limx,y→0,0 r2α12sin2tr2 = limx,y→0,0 r2α-2 12sin2t

r2α-2 → 0 ssi 2α -2 >0

x = r cos t
y= r sin t est défini ssi 2 α – 2>0

Quand elle existe la limite vaut 0.

A partir de maintenant a >1 et on définit f : $\mathbb{R}^2$ → R

(x,y) → f(x,y) si (x,y) ≠ (0,0)
0 si (x,y) = (0,0)

⇨

⇨ f est une fonction continue en touts les points de R².

⇨

⇨ 2.3 Différentiabilité de R² (a>1)

⇨ Rq : Pour a ≤ 1, il est impossible de prolonger f à f de façon continue. Donc il n'y a pas de

chance de trouver une fonction f qui prolonge f différentiablement (Thm : différentiable

→ Continue )

⇨

⇨ 2. Dans le cas où f se prolonge par continuité en (0,0) pour quelles valeurs de a la fonction ainsi obtenue est-elle de classe $C^1$ sur R² ?

⇨

⇨ δfδx = ?

⇨

⇨ δfδy = ?

⇨ ealn(x) si x>0

⇨ g(x) = ealn|x|= ealn-x si x <0

⇨

- ⇨ g’(x) =N colonnes
- ⇨ N colonnes
- ⇨ N colonnes
- ⇨ Si x >0
- ⇨ Si x <0
- ⇨ = u
- ⇨ Car x =- x

- ⇨ axealn(x) = axa-1=a xa-1

- ⇨ g’(x) =N colonnes
- ⇨ N colonnes
- ⇨ N colonnes
- ⇨ Si x >0
- ⇨ Si x <0
- ⇨ = u
- ⇨ Car x =- x

⇨ ealn(-xN colonnes

⇨ N colonnes
⇨ N colonnes
⇨ Si x >0
⇨ Si x <0
⇨ = u
⇨ Car x =- x

⇨ ) au*u'x = -aua-1=-a xa-1

⇨ a xa-1

g'(x) =

⇨ -a xa-1

⇨
⇨ <u>Cas 1</u> xy>0
⇨

⇨ ∂f∂x = ∂∂x xyαx2+y2 =

⇨

aaxa-1 x2+y2- 2xxa(x2+y2)²

⇨ Si x>0 = y

axa-1 (a- 2x2+ ay2)(x2+y2)²

⇨ = y

⇨

a-axa-1 x2+y2+

⇨ Si x<0 = y N colonnes

⇨ N colonnes
⇨ N colonnes
⇨ Si x >0
⇨ Si x <0
⇨ = u
⇨ Car x =- x

2xxa(x2+y2)²

⇨

axa-1 (a- 2x2+ ay2)(x2+y2)²

⇨ = -y

⇨

⇨ pour ∂f∂y on échange x et y.

⇨
⇨
⇨
⇨
⇨
⇨
⇨ <u>Cas 2</u> xy<0
⇨

axa-1 (a- 2x2+ ay2)(x2+y2)²

⇨ ∂f∂x = y si x >0

axa-1 (a- 2x2+ ay2)(x2+y2)²

⇨ - y si x <0

⇨

⇨ pour ∂f∂y on échange x et y.

⇨
⇨ <u>Cas 3</u> xy = 0

- ⇨ (0,0) appliquer la définition.

- ⇨ ∂f∂x = limh→0fx+h,0- f(x,0)h=limh→00 - 0h = 0

- ⇨ ∂f∂xx,0= limh→0fx,h- f(x,0)h

- ⇨ x ≠ 0 → = limh→0xha(x2+h2)h

- ⇨
- ⇨ x = r cos t
- ⇨ h = r sin t
- ⇨

- ⇨ = limr→0r2a|sintcost|r3sint

- ⇨ p = 2, $a_1$= x, $a_2$ = 0, i = 2.
- ⇨
- ⇨ En valeur absolue,

- ⇨ lim r2a-3r→0|sintcost||sint| + 0 si 2a>3

- ⇨ (x,y) = (0,0)

- ⇨ ∂f∂x = limh→0fh,0- f(0,0)h = 0 = ∂f∂y

- ⇨ Continuité des dérivées partielles ? $C^1$.
- ⇨
- ⇨
- ⇨ <u>3. Dans le cas où f se prolonge par continuité en (0,0) pour quelles valeurs de a la fonction ainsi obtenue est-elle différentiable sur R² ?</u>
- ⇨
- ⇨