Fiche 4. TD4. 28/03/11

Exercice 1.

2. f : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ « à valeurs vectorielles » (exemple : un arc)

$x \rightarrow (f(x), \ldots, f_p(x))$

Les f_i sont dérivables sur $\mathbb{R}$

f_i : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

- Vérifier que f est différentiable
- Déterminer sa jacobienne.

Si f est différentiable, nous savons qu'il y a une seule façon de représenter sa différentielle
df(x) € $L(R,R^p)$
df(x) est représentée (par rapport à la base canonique) par une matrice 1 * p.

Jac(f(x)) =représente
g2

df(x) =f1'(x)f2'(x)⋮fp'(x)

limh→0fx+h-fx-dfx.hRp h=0 ?

= limh→0fx+h, … ,fpx+h-(fx, … ,fpx+h)-f1'(x)f2'(x)⋮fp'(x).hRp h

= limh→0… ,fix+h-fix-f'ix.h ,…Rp h

= limh→0…, fix+h-fix-f'ix.hh, …Rp

limh→0i=1p fix+h-fix-f'ix.hh

Or on a supposé que chaque f_i est dérivable en tout point x € R.

Donc

limh→0fix+h-fix-f'ix.hh = 0

Conclusion (*) = 0

Rmq : On a calculé cette limite en utilisant la norme $||.||_1$ sur R mais comme toutes les normes

sont équivalentes sur R^p la limite ne dépend pas du choix de la norme.

Exercice 2 :

B : $R^p * R^p \rightarrow R$

P € N^* $(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_p) \rightarrow$ i=1pxiyi=x*y

Où $x = (x_1, \ldots, x_p)$ et $y = (y_1, \ldots, y_p)$. Montrer que la différentielle de B au point (x,y) est donnée par l'application linéaire suivante :

dB : $R^p * R^p \rightarrow R$
P € N^* $(x,y) \rightarrow dB(x,y)(h,k) = x.k + y.h$

Df(x,y) est représentée par une matrice
1 *2p

i=1pxiyi

δfδx(i=1pxiyi) = y_1

δ2fδx(i=1pxiyi) = y_2

(i=1pxiyi) = y_p
δfδxp

δfδy1(i=1pxiyi) = δ_{p+1}(i=1pxiyi)=x1

Si f est différentiable en (x,y), alors dB(x,y) =(y x)

limh,k→(0,0)Bx+h,y+k-Bx,y-dBx,y.hk h,kR2p

h = (h_1, … , h_p)
k = (k_1, … , k_p)

limh,k→(0,0)i=1px+h)(y+k-i=1pxiyi-y x.hk h,kR2p

Numérateur

i=1pxiyi+ i=1pxiki+i=1pyiki + i=1phiki

i=1p(xiyi + xiki + yiki + hiki) - i=1pxiyi - i=1pyiki - i=1pxiki r2r p = 1

= i=1phiki

⇨ limh,k→(0,0)i=1phiki i=1p|hi| + i=1p|ki|

⇨ ≤ limh,k→(0,0)i=1phikii=1p|hi| + i=1p|ki|

⇨ = limh,k→(0,0)i=1p|hiki|i=1p|hi| + i=1p|ki| = 0 |hiki|i=1p|hi| + i=1p|ki|≤ |

hiki||hi|

<u>Fait du cours</u> Si les dérivées partielles sont continues sur un voisinage, alors leurs existence est suffisante pour conclure que la fonction est différentiable sur ce voisinage → C^1.

<u>Conclusion pratique :</u> Comme le produit scalaire a des dérivées partielles continue sur $R^p x R^p$, elle est différentiable sur $R^p x R^p$.

Exercice 3.
Soit p € N^*. Pour chaque i € {1, … ,p}, on définit la projection.

π_i : R^p → R
$(x_1, \dots , x_i, \dots , x_p)$ → x_i.

1/ Montrer que π_i est une application différentiable. Déterminer sa différentielle.
Cas particulier
trivial :
p = 1, x → x

$d\pi_i(x_1, \dots ,x_p)$ = (0 … 1 … 0)

0 si i ≠ j

δπδxj =

1 si i = j

En d'autres termes, chaque dérivée partielle est une fonction constante, en particulier continue sur R^p. Donc, π_i est différentiable sur R^p.

$d\pi_i(x_1, \dots, x_p) = (0 \dots 1 \dots 0)$

$d\pi_i : \quad R^p \rightarrow L(R^p, R)$

$\qquad\quad x \rightarrow (0 \dots 1 \dots 0)$

(espace dual)

$d\pi_i \Leftrightarrow dx_i, dx, dy$.

En chaque point de R^p.

$d\pi_i(x) : R^p \rightarrow R^p € L(R^p, R)$

$f : R^p \rightarrow R$ différentiable en x.

$df(x) € L(R^p, R)$

=

$i=1r\alpha id\pi i(x)$

$\alpha_i = \delta f\delta x$

$\qquad i$

$\delta f = i=1r\delta f\delta x$ (en x)

$\qquad idxi(x)$

$(d\pi_i(x), \dots, d\pi_p(x))$ est la base canonique de $L(R^p, R)$ en x.

Exercice 4.

I/

$f : \quad R^3 \rightarrow R^2$

$\qquad (x,y,t) \rightarrow (x^2 + y^2 + 2z^2, x^2 - y^2)$

$g: \quad R^2 \rightarrow R^2$

$(u,v) \rightarrow (u, u^2+3v^2, v+2)$

y Dg

x

-2 Df

$D_{f\,o\,g}$ = ? = D_g.

2. différentiabilité.

$D_{fog} =]\,0, +\infty[\times]\,-2, +\infty[$

Intérieur de D_{fog} = D_{fog} = $Int(D_{fog})$

C'est exactement le domaine de différentiabilité pour fog (ainsi que pour g) car les fonctions f et g sont différentiables (cours) sur les intérieurs de leurs domaines.

f est différentiable sur R^3

g est différentiable sur $]\,0, +\infty[\times]\,-2, +\infty[$.

f o g → jacobienne.

f → jacobienne

$g \rightarrow$ jacobienne

$df(x,y,z) = 2x2y4z2x\text{-}2y0$

$dg(u,v)\ ) = 12u0uu^2+3v^2 3vu^2+3v^2 012v+2$

$d(fog)(u,v) = 2u2u^2+3v^2 4v+22u\text{-}2u^2+3v^2 012u0uu^2+3v^2 3vu^2+3v^2 012v+2$

$d(fog)(u,v) = 1+2u6v+21\text{-}2u\text{-}6v$

$d(fog)\ (u,v) = df(g(u,v)) * dg(u,v)$

$f \circ g : (u,v) \rightarrow (3v^2 + 2v + u + u^2 , - 3v^2 + u - u^2)$

II/

f R $\rightarrow$ R

on pose $h(u,v) = f(\sin u + \cos v)$

h R^2 $\rightarrow$ R

$D_h = D_{h,g} = R^2$ $D_f = R$

R^2 g R f R

$(u,v) \rightarrow \sin u + \cos v \rightarrow f(\sin u + \cos v)$

$h = fo\ g$

$dh(u,v) = df(g(u,v)) * dg(u,v)$

$= df(g(u,v))*(\cos u - \sin v)$

$f'(g(u,v))$

On peut tout exprimer sous la forme équivalente aussi

$dh(u,v) = (\delta h \delta u \;\; \delta h \delta v)$

$\delta h \delta u = f'(g(u,v)) \cos u$

$\delta h \delta v = - f'(g(u,v)) \sin v$

$\delta h \delta v \sin v + \delta h \delta u \cos u = 0$

$\sin v \, \delta h \delta u = f'(g(u,v)) \cos u \sin v$

$\cos u \, \delta h \delta v = - f'(g(u,v)) \sin v \cos u$

III/

Soient

$y : \quad R^2 \rightarrow R$

$z : \quad R \rightarrow R$

$f : \quad R^3 \rightarrow R$

deux fonctions différentiables en tous les points de R^2, R, R^3 respectivement.

On pose $h(x) = f(x,y(x,z(x)), z(x))$
Vérifier l'identité suivante :
$h'(x) = \delta_1 f(x,y(x,z(x)), z(x)) +$
$\delta_2 f(x,y(x,z(x)), z(x)) [\delta_1 y(x,z(x)) + \delta_2 y(x,z(x))z'(x)] +$
$\delta_3 f(x,y(x,z(x)), z(x)) z'(x)$.

$h'(x) = dh(x) = d(fog)(x) = df(g(x))*dg(x)$.

$dg(x) = g1'(x)g'2(x)g'3(x) = 1g'2(x)z'(x)$

$g_2'(x) = ?$

u y

$g_2(x)$ x $\rightarrow$ $(x,z(x))$ $\rightarrow$ $y(x,z(x))$représente
g2

$g'_2(x)$ = $dy(x,z(x))$ 1z'

=(δ_1 $y(x,z(x))$ δ_2 $y(x,z(x))$* 1z'

= δ_1 $y(x,z(x))$ + $z'\delta_2$ $y(x,z(x))$

h'(x) =($\delta_1 f(x, y(x,z(x)),z(x))$ δ_2 $f(x, y(x,z(x)),z(x))$ $\delta_3 f(x, y(x,z(x)),z(x))$)

= 1δ
1yx,zx δ2yx,zx z'