MATHS IV, ANALYSE (PRINTEMPS 2011)-FICHE 6.

Exercice 1 : Ellipse

Idée : f : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \rightarrow x^2a^2 + y^2b^2$

a,b € $\mathbb{R}+^*$

Définition : Une ellipse est une ligne de niveau $L_d(f)$ de f.

On se restreindra aux valeurs de d € $\mathbb{R}+^*$.

$L_d(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2a^2 + y^2b^2 = d\}$

Si a = b alors c'est l'équation d'un cercle.

$\partial f \partial x = 2xa^2$

$\partial f \partial y = 2yb^2$

⇨

⇨ f(x,y)= (2xa2, 2yb²)

Rq : f est une fonction $C^1(\mathbb{R}^2)$

Cours :

f ⊥ droite tangente à la ligne de niveau en un point.

2. Intersection avec les axes.
f(x,y)=d

xa2+ yb^2 = d

x = 0 ➔ y =±bd

y = 0 ➔ x =±ad

3. équation de la droite tangente en (x0,y0)

Rq : u,v € R^p u ⊥ v ssi u.v= 0

i=1nuivi = B(u,v)

u(u_1, ..., u_p) v(v_1, ..., v_p)
On utilise le théorème du cours

f(x0,y0) ⊥ droite tangente à la ligne de niveau en (x0,y0)_

Alors, la droite tangente est l'ensemble
{(x,y) € R² |

f(x0,y0) .(x-x0, y – y0) = 0 }

= {(x,y) € R² | (2x0a2+ 2y0b^2) .(x-x0, y – y0) = 0 }

2x0a2x-x0+2y0b^2 (y – y0) = 0

2y0b^2 (y – y0) = - 2x0a2x-x0

On suppose y0 ≠ 0.

y – y0 = - x0y0b^2a2x-x0

y = - x0y0b^2a2x-x0 + y0 (1)

On a tout ce qui est nécessaire pour dessiner une ellipse.
La perte de la tangente set soit :

-x0y0b^2a2 si y0≠ 0

Soit ∞ si (y_0 = 0) (// à l'axe des y).

Quand x_0 > 0 la tangente est de pente négative et limy0→0pente de la tangente = - ∞

Quand x_0 <0 -x0y0b^2a2 > 0

(0,bd)

f

(-ad, 0) (-ad, 0)

(0,-bd)

On suppose y >0, (la moitié supérieur de l'ellipse) $x^2a^2+y^2b^2$ = d ⇔ y = bd- x^2a^2 .

On a y en fonction de x pour vérifier que le graphe de cette fonction y = e_t(x)= bd- x^2a^2

est une ellipse il suffit de la dériver.

y'= b -xa^2d- x^2a^2 et avec d = $x^2a^2+y^2b^2$.

y'= b -xa^{2}d- x^{2}a^2 = -bxa^{2}by= -xa^{2}b^{2}y= -xyb^{2}a^{2}Coefficient directeur de l'ellipse. (1)

⇨

Exercice 2.

f : R² → R

(x,y) → x3x^2+y^2 si (x,y) ≠ (0,0)

1. si (x,y) = (0,0)

1. f est continue en (0,0) → coordonnées polaires dérivées directionnelles en (0,0) = ?
   En (0,0), nous ne savons pas si f est différentiable. Alors, pour déterminer les dérivées directionnelles nous utilisons la définition.
   On fixe une direction (u,v) € R² \{0,0}

   limh→0f0,0+ hu,v-f(0,0)h

   limh→0fhu, hv-f(0,0)h =

   limh→0(hu)3u^2+v^2-f(0,0)h =

   limh→0(hu)3h(h^{2}u2+h^{2}v2) =

   limh→0u3u2+ v^2 ≠ 0

En particulier, $\partial f \partial x = \partial_1 f(0,0) = 1 \Leftrightarrow (u,v) = (1,0)$

$\partial f \partial y = \partial_2 f\,(0,0) = 0 \Leftrightarrow (u,v) = (0,1)$

limh,k→0,0|fh,k-f0,0-[1 0]hkh,k

= limh,k→0,0|h3h2+k2-h|h^2-k^2

= limh,k→0,0|-hk^2|h^2-k^2

= r3(des trucs qui dépendent de t)r3 = des trucs qui dépendent de t PAS DE LIMITE !

f : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

(x,y) → x3x^2+y^2 , si &x,y≠(0,0)0 si &x,y=(0,0)

Interprétation géométrique :
Ceci utilise la notion de plan tangent.

On introduit
f : $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
(x,y,z) → f(x,y) – z

Le graphe de f est la « surface » de niveau 0.
f(x,y) = 0 ssi F(x,y,z) = 0
Le vecteur gradient
Fest $\perp$ <u>au plan tangent</u> au graphe de f.

$F(x,y,z) = ($

$f, -1) = (\partial f\partial x\ , \partial f\partial y, -1).$ P

En un point (x_0,y_0,z_0), le plan tangent est $\{(x,y,z) \in R^3 \mid$
$F(x_0,y_0,z_0).\ (x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0\}$

$\Leftrightarrow (x-x_0).\partial f\partial x\ (x_0,y_0) + (y-y_0).\partial f\partial y\ (x_0,y_0) - (z - z_0) = 0$

$\partial f\partial x = 3x2x2+y2- 2x4(x2+y2)^2 = x4+ 3x^2y^2(x2+y2)^2$

$\partial f\partial y = -2yx3(x2+y2)^2$

$F(x,y,z) = (x4+ 3x2y2x2+y22, -2yx3x2+y22, -1)$

(1,0,-1) sinon.

En (0,0,0) le « plan tangent »
$(1,0,-1).(x,y,z) = 0$
$\Leftrightarrow x - z = 0 \quad \Leftrightarrow z = x$
$(x_0,0,0)\ (0,y_0,0)$
$x_0 \neq 0 \quad y_0 \neq 0$

En $(x_0, 0,0)$, $(x-x_0, y, z) .(1,0,-1) = 0$
$\Leftrightarrow z = x-x_0 \rightarrow z= x$ quand $x_0 \rightarrow 0$
En $(0,y_0,0)$, $(x,y-y_0,z).(0,0,-1) = 0$
$\Leftrightarrow z = 0$ ne tend pas vers $z = x$ quand $y_0 \rightarrow 0$.