Maths IV, Analyse (Printemps 2011) - Fiche 7.
11 avril 2011.

Exercice 1 (Extrema locaux/ globaux).

f : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \rightarrow 2x3+6xy-3y^2 + 2$

1. Extrema locaux
   Déterminer (a_1, a_2)
   $df(a_1,a_2) = 0$.
   éq :

   $\partial y \partial x = 0 \rightarrow \partial y \partial x=6x^2+ 6y = 0 \rightarrow y = -x^2$

   $\partial y \partial y = 0 \rightarrow \partial y \partial y=-6y+ 6x = 0 \rightarrow x = y$

- ⇨ $x^2 + x= 0$ ⇔ $x= 0$ ou $x=1$
- ⇨ (0,0) ou (-1,-1).

$R = 12 x$; $T = -6$; $S = 6$.

$H_f(x,y) = 12x66-6$

En (0,0), on obtient :

$H_f(x,y) = 066-6$

	En (0,0)	En (-1,-1)
R	0	-12
S	6	6
T	-6	-6
$RT – S^2$	-36	36
R+T	$-6 < 0$	$- 18 < 0$
Type de point	Point selle	Maximum

C'est une matrice 2*2 de trace -6 et de déterminant -36.

En particulier, les valeurs propres sont non nulles et de signes différents :

Pas d'extrema.

La matrice Hessienne ~ diagonale ave diagonale réelle.

λ

i0⋱0λp

$\lambda_i > 0$, min
$\lambda_j <0$, max
$\lambda_i > 0$, $\lambda_j < 0$ → pas d'extrema point selle.
$\lambda_i ><0$, $\lambda_i = 0$, $\lambda_j > 0$, $\lambda_j = 0$ → pas de conclusion.

2. f possède-t-elle des extrema globaux.
   (-1,-1) → f(-1,-1)

   si on pose y = 0, alors on a f(x,0) = 2x3+2

   limx→∞fx,0= +∞

3. L = {(x,y) € R² | -2 ≤ x ≤ 0, y = x +1}

L (0,1) On pose g(x) = f(x,x)

(-2,-1)

Recette pour les déterminer :
On étudie :
- les points critiques X.
- la frontière de L.
- L'intérieur de L.

Sur L, on a y = x + 1 et on pose g(x) = f(x,x+1) et on étudie g'(x) = 0
$g(x) = 2x^3 + 6x(x+1) – 3(x+1)^2 + 2$.
$g'(x) = 6x^2 + 12x + 6 - 6x -6$

$g'(x) = 6x^2 + 6 = 0$ ssi $x = 0$ ou $x = -1$.

<u>3 points candidats :</u>

(0,1)

(-2,-1) € L

(-1,0)

On évalue la fonction en ces points :

$f(0,1) = -1$

frontière

$f(-2,-1) = -16 + 12 - 3 + 2 = -5$ minimum

intersection $f(-1,0) = 0$ MAXIMUM

<u>Exercice 2 (Extrema locaux/ globaux).</u>

Soit f : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + x^2y^2 - x4 - y4$ pour tout (x,y) € $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer les extréma locaux de f.

$\partial f \partial x = 4x + 2xy^2 - 4x^3 = 0$

$\partial f \partial y = 4y + 2x^2y - 4y^3 = 0$

$2x(2 + y^2 - 2x^2) = 0$

$2y(2 + x^2 - 2y^2) = 0$

1/ $(x,y) = (0,0)$

2/ $y^2 - 2x^2 + 2 = 0$ et $y = 0$ $2 + y^2 - 2x^2 = 0$

si $y = 0$ alors $x = \pm 1 \Rightarrow 2$ $\pm 1,0$

3/ $-2y^2 + x^2 + 2 = 0$ et $x = 0$ par symétrie $0,\pm 1$

4/ $x \neq 0$, $y \neq 0$.

$2 + y^2 - 2x^2 = 0$

$\Rightarrow y^2 - 2x^2 = x^2 - y^2$

$2 + x^2 - 2y^2 = 0$

- ⇨ $y = \pm x$ et $2 - x^2 = 0$

- ⇨ $x = \pm 2$

- ⇨ $(2, 2), 2, -2, -2, 2, (-2,- 2)$

$\partial^2 f \partial x^2 = 4+2y^2-12x^2$

$\partial^2 f \partial y^2 = 4+2x^2-12y^2$

$\partial^2 f \partial x \partial y = 4xy$

(0,0)

4004 → min local.

(1,0)

-8006 → point selle pas d'extremum.

$(2, 2)$,

$-1688-16$ → dét> 0, trace<0 ➔ max local.

2. Extrema globaux pour f.

   Obj : les maximums sont globaux.

On pose $x = r \cos t$
$y = r \sin t$

$f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 - (x^2-y^2)^2 - x^2y^2$

⇨ $f(r,t) = 2r^2 - r^4 (\cos^2 t - \sin^2 t)^2 - r^4\cos^2 t\sin^2 t$

$= 2r^2 - r^4[\cos^2 2t + \sin 22t4]$

$= 2r^2 - r^4[14 + 3\cos^2 2t4]$

≥ 14

$\leq 2r^2 - r^{44}$

⇨ les max locaux sont globaux.

3. Min globaux ?
   $x = 0$ ➔ $f(0,y) = 2y^2-y^4$

⇨ Il n'y en a pas.