UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1
Institut Camille Jordan

Travaux dirigés:
Tuna Altınel
Jean-Baptiste Aujogue
Jean-Cristophe Benière

Math IV, Analyse (Printemps 2011) – Fiche 1

28 février 2011

Exercice 1 (De nouvelles distances à partir des anciennes).
Soient (E, d) un espace métrique et $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction de domaine $\mathbb{R}_+$ et qui satisfait les conditions suivantes :

FD1 $f(0) = 0$;

FD2 f est une fonction strictement croissante ;

FD3 pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$, $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.

Montrer que la fonction suivante munit E d'une nouvelle notion de distance.

$$\begin{array}{rcccl} d_f & : & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & & (x, y) & \longmapsto & f(d(x, y)) \ . \end{array}$$

Montrer que les lois

$$t \mapsto \frac{t}{1+t} \quad , \quad t \mapsto \sqrt{t}$$

définissent dans $\mathbb{R}_+$ des fonctions qui satisfont les conditions FD1, FD2, FD3.

Exercice 2 (Espaces normés, quelques exemples).
1. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$), on considère les trois applications de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}$ définies pour tout $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ par :

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{p} x_j^2}, \qquad \|x\|_\infty = \max_{j=1,\ldots,n} |x_j|, \qquad \|x\|_1 = \sum_{j=1}^{p} |x_j|.$$

Vérifier que ces applications définissent des normes. (*Pour vérifier que* $\| \ \|_2$ *satisfait l'inégalité triangulaire, vous pouvez vous servir sans preuve du* ***lemme de Schwartz*** *:*

$$\textit{pour tous} \ \ (a_1, \ldots, a_p) \ , \ \ (b_1, \ldots, b_p) \in \mathbb{R}^p \ , \ \left| \sum_{i=1}^{p} a_i b_i \right| \ \leq \ \sqrt{\sum_{i=1}^{p} a_i^2} \ \sqrt{\sum_{i=1}^{p} b_i^2} \ . \ )$$

2. Vérifier que la fonction

$$\begin{array}{rcccl} || \ || & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & & (x, y) & \longmapsto & \max(|x + 3y|, |x - y|) \end{array}$$

définit une norme dans $\mathbb{R}^2$. Dessiner $B((0, 0), 1)$ par rapport à cette norme.

3. Déterminer des conditions suffisantes sur les constantes a, b, c, d pour que la fonction suivante définisse une norme dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{rcccl} || \ || & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & & (x, y) & \longmapsto & |ax + by| + |cx + dy| \ \ . \end{array}$$

Exercice 3 (Un espace métrique n'est pas nécessairement un espace normé).
1. Montrer que si $(E, || \, ||)$ est un espace normé non réduit à $\{0\}$, alors E n'est pas borné, en d'autres termes pour tout $r \in \mathbb{R}_+$, il existe $x \in E$ tel que $||x|| \geq r$.

2. Montrer que tout ensemble E non vide peut être muni d'une métrique. En conclure, en explicitant un exemple, qu'il existe un ensemble E et une métrique dans E qui n'est induite par aucune norme.
3. Montrer que la fonction suivante définit une métrique dans $\mathbb{R}$:

$$d \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x, y) & \longmapsto & \frac{|x-y|}{1+|x-y|} \end{array}$$

Montrer que cette métrique n'est induite par aucune norme dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4 (Normes équivalentes).
1. Soit $l \in [1, +\infty[$. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^p$ $(p \in \mathbb{N}^*)$. Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, on définit $\|x\|_l = \left(\sum_{j=1}^{p} |x_j|^l \right)^{\frac{1}{l}}$. On admettra que la fonction $x \to \|x\|_l$ définit une norme dans $\mathbb{R}^p$. Montrer que pour tous $l_1, l_2 \in [1, +\infty[$, $\| \, \|_{l_1}$ et $\| \, \|_{l_2}$ sont équivalentes.

2. Soient E un espace vectoriel, $\| \, \|$ et $\| \, \|'$ deux normes équivalentes sur E. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x \in E$

$$\lambda \|x\| \;\leq\; \|x\|' \;\leq \frac{1}{\lambda}\|x\| \quad \text{et} \quad \lambda \|x\|' \;\leq\; \|x\| \;\leq \frac{1}{\lambda}\|x\|' \,.$$

Exercice 5 (Norme subordonnée).
L'ensemble des applications linéaires $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ avec $p, q \in \mathbb{N}$ arbitrairement fixés, muni de l'addition usuelle des fonctions

$$u \;+\; v \;:\; x \;\longmapsto\; u(x) + v(x) \;\; \text{pour toutes } u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$$

et de la multiplication usuelle par les réels

$$\lambda u \;:\; x \;\longmapsto\; \lambda \; u(x) \;\; \text{pour toute fonction } u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q) \text{ et tout scalaire } \lambda \in \mathbb{R}$$

est un espace vectoriel. Le but de cet exercice est de le munir d'une norme. A cet effet, on définit

$$||| \; ||| \;\; : \;\; \begin{array}{ccl} \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ u & \longmapsto & |||u||| \;=\; \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|_{\mathbb{R}^p}}{\|x\|_{\mathbb{R}^q}} \end{array} \;,$$

où $\| \, \|_{\mathbb{R}^p}$ et $\| \, \|_{\mathbb{R}^q}$ sont deux normes arbitrairement fixées sur $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ respectivement.

1. Montrer que pour tout $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$, il existe une constante $M \in \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^p$,

$$\|u(x)\|_{\mathbb{R}^q} \leq M \|x\|_{\mathbb{R}^p} \;\; .$$

2. Montrer que si M est une constante comme celle déterminée dans le premier point, alors

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|_{\mathbb{R}^q}}{\|x\|_{\mathbb{R}^p}} \;=\; \sup_{\|x\|_{\mathbb{R}^p}=1} \|u(x)\|_{\mathbb{R}^q} \;\leq M \;.$$

3. Montrer en utilisant les points précédents que $||| \; |||$ détermine une norme sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$.