UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1
Institut Camille Jordan

Travaux dirigés:
Tuna Altınel
Jean-Baptiste Aujogue
Jean-Cristophe Benière

Math IV, Analyse (Printemps 2011) – Fiche 10

16 mai 2011

Exercice 1 (Courbes paramétrées : spirale logarithmique).
La *spirale logarithmique* est définie par l'application

$$\begin{array}{rccc} \gamma & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \longmapsto & (e^{at}\cos t, e^{at}\sin t). \end{array}$$

Dans cet exercice nous supposerons $a \in \mathbb{R}_+^*$. On posera $x(t) = e^{at}\cos t$ et $y(t) = e^{at}\sin t$.

1. Dessiner la spirale logarithmique. Pour vous guider, répondez aux questions suivantes :
   1.1 Calculer les valeurs de t pour lesquelles $x(t) = 0$. Résoudre la même question pour y.
   1.2 Déterminer la pente de la tangente aux valeurs de t trouvées dans le point précédent.
   1.3 Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la pente de la tangente s'annule.
   1.4 Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la pente de la tangente n'est pas définie.
2. Calculer la longueur de l'arc entre $\gamma(0)$ et $\gamma(t)$.
3. Montrer que $\gamma(t) \mapsto (0,0)$ quand $t \mapsto -\infty$.
4. Montrer que la longueur de l'arc entre 0 et t a une limite finie quand $t \mapsto -\infty$.
5. Montrer que la tangente à la spirale logarithmique en tout point de celle-ci fait un angle constant avec la droite joignant ce point à l'origine.

Exercice 2 (Courbes paramétrées : hélice).
L'hélice circulaire à pas constant est définie par l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} \gamma & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & t & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ z = ht \end{array} \right. \end{array}$$

avec $r, h \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que le vecteur tangent à l'hélice en tout point de celle-ci fait un angle constant avec le vecteur vertical $(0,0,1)$.
2. Calculer la longueur d'une spire de l'hélice ($t \in [0, 2\pi]$).
3. Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_\gamma (y-z)\,\mathrm{d}x + (z-x)\,\mathrm{d}y + (x-y)\,\mathrm{d}z$$

Exercice 3 (Intégrales curvilignes : fonctions).
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Calculer les intégrales $\int_\gamma f \ \mathrm{d}s$ dans les cas suivants, en parcourant toujours les chemins dans le sens positif, c'est-à-dire dans le sens inverse des aiguilles d'une montre :

1. $f(x, y) = x^2 + y^3$ et γ est le bord du triangle de sommets $(0, 0), (1, 0)$ et $(0, 1)$,
2. $f(x, y) = x^2 + y^2$ et γ est le cercle de centre $(1, 1)$ et de rayon 2.
3. $f(x, y) = xy$ et γ est le quart d'ellipse d'équation $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ situé dans le quart de plan $\{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$.

Exercice 4 (Intégrales curvilignes : champs de vecteurs).

I. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs défini pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$ par

$$F(x, y) = (2xy, x^2 + y^2) \ .$$

Calculer l'intégrale de ce champ de vecteurs le long des arcs orientés suivants :

1. Le segment orienté d'origine $(0, 0)$ et d'extrémité $(1, 1)$,
2. L'arc de parabole d'équation $y = x^2$, du point $(0, 0)$ au point $(1, 1)$.

Quelle conjecture en déduisez-vous ? Démontrer votre affirmation.

II. Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_C (2x - y) \ \mathrm{d}x + (x + y) \ \mathrm{d}y$$

où C est le cercle de centre 0 et de rayon R, orienté positivement (dans le sens inverse des aiguilles).

III. Soit (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n) les sommets successifs d'un polygone convexe.

1. Calculer l'intégrale curviligne $\frac{1}{2} \int_\gamma x \ \mathrm{d}y - y \ \mathrm{d}x$, où γ est la courbe fermée et orientée positivement, formée par les bords du polygone.
2. Comparer avec l'aire du polygone pour $n = 3$ et $(x_3, y_3) = (0, 0)$.

Exercice 5 (Intégrales curvilignes (entraînement)).
Calculer l'intégrale curviligne $\int_\Gamma -y \ \mathrm{d}x + x \ \mathrm{d}y$, où Γ est l'intersection de la sphère de centre $(0, 0, 0)$ et de rayon 1, et du plan d'équation $x + y + z = 1$, en indiquant le sens choisi du parcours.