UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1
Institut Camille Jordan

Travaux dirigés:
Tuna Altınel
Jean-Baptiste Aujogue
Jean-Cristophe Benière

# Math IV, Analyse (Printemps 2011) – Fiche 11

**23 mai 2011**

**Exercice 1 (Green-Riemann).**
Soit l'ensemble

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0 \right\} .$$

Calculer de deux façons différentes l'intégrale

$$I = \iint_D (x-y)\ dxdy$$

1. en utilisant le changement de variables : $\left\{ \begin{array}{l} x = 2r\cos(\theta) \\ y = 3r\sin(\theta) \ ; \end{array} \right.$
2. en utilisant la formule de Green-Riemann.

**Exercice 2 (Green-Riemann, calcul d'aire).**

1. Une *cycloïde* est définie par la courbe paramétrée suivante :

$$\begin{array}{cccl} \gamma & : & \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & & t & \longmapsto \left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & a(t-\sin t) \\ y(t) & = & a(1-\cos t) \end{array} \right. \end{array} \qquad (t \in \mathbb{R}\ ,\ a \text{ est une constante réelle strictement positive}) .$$

   (a) Représenter soigneusement une arche de la cycloïde ($t \in [0, 2\pi]$).
   (b) Déterminer l'aire de la région limitée par une arche de la cycloïde et l'axe des $x$.

2. Déterminer l'aire limitée par la *lemniscate de Bernoulli* sur le plan cartésien. La formule en coordonnées polaires est

$$r = \sqrt{2\cos(2t)}\ .$$

   Pour faciliter la compréhension et le calcul, commencer par dessiner soigneusement la lemniscate sur le plan cartésien.

**Exercice 3 (Intégrales de surface).**
Calculer l'intégrale

$$\int_\Sigma (x^2+z^2)\,\mathrm{d}y \wedge\ \mathrm{d}z\ +\ (y-z)\ \mathrm{d}z \wedge\ \mathrm{d}x\ -\ 2xz\,\mathrm{d}x \wedge\ \mathrm{d}y$$

où $\Sigma$ est le bord de $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2+z^2 \leq R^2\ ,\ -a \leq x \leq a\}$.

**Exercice 4 (Intégrales de surface et le théorème de Stokes).**
On définit

$$\omega \;=\; (y-z)x \;\; \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \;+\; (z-x)y \;\; \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \;+\; (x-y)z \;\; \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \;\; .$$

sur $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 \;,\; x \geq 0 \;,\; y \geq 0 \;,\; 0 \leq z \leq c\}$ orienté par la normale extérieure au cylindre.

1. Vérifier que $\mathrm{d}\omega = 0$.
2. Trouver une primitive de $\omega$ de la forme $f(x,y,z)(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z)$ telle que $\frac{\partial f}{\partial x} = -yz$.
3. En déduire que l'intégrale de $\omega$ sur $\Sigma$ est $abc(b-a)/3$.

**Exercice 5 (Green-Riemann, quand peut-on l'appliquer ? ).**
Calculer $\int_\Gamma P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$, avec pour $(x,y) \neq (1,0)$,

$$P(x,y) = \frac{-y}{(x-1)^2 + y^2} \qquad \text{et} \qquad Q(x,y) = \frac{x(x-1)+y^2}{(x-1)^2+y^2} \;,$$

et pour $\Gamma$ une courbe fermée et non intersectante de $\mathbb{R}^2$, de classe $C^1$ par morceaux, orientée positivement et ne passant pas par $(1,0)$. Discuter les différents cas possibles.

**Exercice 6 (Entraînement).**
Soit $\Gamma$ une courbe fermée et non intersectante dans $\mathbb{R}^2$ de classe $C^1$ dont le domaine intérieur $D$ est symétrique par rapport à $(0,0)$, c'est-à-dire $(x,y) \in D$ si et seulement si $(-x,-y) \in D$. Démontrer que

$$\int_\Gamma (\cos(xy) + x^3 y + e^y)\,\mathrm{d}x + (xe^y + xy^3)\,\mathrm{d}y = 0 \;.$$