UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1
Institut Camille Jordan

Travaux dirigés:
Tuna Altınel
Jean-Baptiste Aujogue
Jean-Cristophe Benière

Math IV, Analyse (Printemps 2011) – Fiche 2

7 mars 2011

Exercice 1 (Limites : exemples).
(1.) Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un point arbitraire. Calculer, lorsque la limite existe,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \ ,$$

pour la fonction suivante :

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

(2.) Déterminer les limites suivantes quand elles existent :

(a)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \quad ; \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x}{y} \quad ; \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2+1} \quad ;$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+2y^2} \ ; \quad \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+y)}{(x+y)^2-1} \ ; \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{1/3}y^2}{x^2+y^2+|x-y|} \ ;$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(xy)-1}{x^2+y^2} \ ; \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^y \ .$$

(b)

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$$

où la fonction f est définie sur $\{ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y^2 \ \}$ par la loi

$$(x,y) \ \mapsto \ \frac{x^2-y}{x-y^2} \ ,$$

pour les valeurs suivantes de (a,b) : $(1,1)$, $(0,0)$, $(1,-1)$.

(c)

$$\lim_{||(x,y)||\to+\infty} \frac{x \arctan y}{x^2+y^2+1} \ ; \quad \lim_{||(x,y)||\to+\infty} \frac{x^2+y^4}{x^4+y^2} \ ; \quad \lim_{||(x,y)||\to+\infty} (1+|x|+|y|)\sin(y^2) \ .$$

(*Le choix de la norme n'est pas précisé puisqu'elles sont toutes équivalentes sur* $\mathbb{R}^2$).

Exercice 2 (Limites suivant divers chemins).
On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 - 2x^2 y + 3y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = 0. \end{cases}$$

1. Étudier, pour tout $m \in \mathbb{R}$, la limite quand $(x, y) \to (0, 0)$ de la restriction de f à la droite d'équation $y = mx$,
2. Calculer la limite à l'origine de la restriction de f à la parabole d'équation $y = x^2$,
3. Montrer que f n'a pas de limite à l'origine.

Exercice 3 (Continuité).
Etudier la continuité sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{y}{x^2} e^{-\frac{|y|}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \quad ; \qquad \begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} xy \ln \left| \frac{x}{y} \right| & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases} \end{array} \quad ;$$

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \cos(x+y) & \text{si } x + y \geq 0 \\ \mathrm{ch}(x+y) & \text{si } x + y < 0 \end{cases} \end{array} \quad .$$

Exercice 4 (Nature topologique de parties de l'espace normé $\mathbb{R}^p$).
Etablir si les ensembles suivants sont ouverts, fermés. Déterminer également les points intérieurs de ces ensembles ainsi que leur frontière. Dans chacun des exemples, faire un dessin représentant la région concernée.

Parties de $\mathbb{R}$: $\mathbb{N}$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [0,\ 1 - \frac{1}{n}]$

Parties de $\mathbb{R}^2$: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x| < |y| < 1\}$,
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 1) < 0\}$

Parties de $\mathbb{R}^3$: $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 2\}$

Exercice 5 (Topologie et algèbre ; entraînement).
Montrer que pour tout $A \subset \mathbb{R}^p$ et $x \in \mathbb{R}^p$, $A + x$ est ouvert si et seulement si A est ouvert ($A + x = \{a + x | a \in A\}$).