UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1
Institut Camille Jordan

Travaux dirigés:
Tuna Altınel
Jean-Baptiste Aujogue
Jean-Cristophe Benière

Math IV, Analyse (Printemps 2011) – Fiche 3

14 mars 2011

Exercice 1 (Continuité : suite).
(1.) Etudier la continuité des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$:

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{e^{x^2y}-1}{xy} & \text{si} \quad xy \neq 0 \\ x & \text{si} \quad xy = 0 \end{cases} \end{array} ; \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} (x^2+3x+2)\sin(\pi/y) & \text{si} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y = 0 \end{cases} \end{array}$$

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{xy^2}} & \text{si} \quad xy \neq 0 \\ e^x & \text{si} \quad xy = 0 \end{cases} \end{array}$$

2. Soient $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}_+,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \gamma\ \in \mathbb{R}_+^*$ et la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{|x|^{\alpha_1}|y|^{\alpha_2}}{(|x|^{\beta_1}+|y|^{\beta_2})^{\gamma}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

Montrer que la fonction f est continue si et seulement si $\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} > \gamma$.

Exercice 2 (Arcs : exemples simples de calcul).

(a) On définit
$$S = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ||(x,y)||_1 = 1\ \}\ .$$
Trouver une application continue γ de l'intervalle $[0,1]$ vers S telle que $\gamma(0) = (-1,0)$ et $\gamma(1) = (1,0)$.

(b) On définit

$$D = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-1)^2 \leq 1\ \} \cup \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y+1)^2 \leq 1\ \}\ .$$

Ensuite on fixe deux points dans D, $P_0 = (x_0, y_0)$ et $P_1 = (x_1, y_1)$ tels que $y_0 \in \mathbb{R}_-^*$ et $y_1 \in \mathbb{R}_+^*$. Trouver une application continue γ de l'intervalle $[0,1]$ vers S telle que $\gamma(0) = P_0$ et $\gamma(1) = P_1$.

(c) Essayer de répéter le point (b) en remplaçant D par son intérieur. Quelle est votre conclusion ? Justifiez-la rigoureusement.

Exercice 3 (Topologie : ensembles compacts).
Déterminer rigoureusement si les ensembles suivants sont compacts :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x| < |y| < 1\}$$

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^2+y^2+z^2-4)(x^2+y^2+z^2-1) \leq 0\}$$

Exercice 4 (Calcul différentiel : premiers pas).

1. Etudier si les fonctions suivantes sont différentiables en $(0,0)$:

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x^3y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

2. Montrer que la fonction suivante est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \cos(x+y) & \text{si } x+y \geq 0 \\ \text{ch}(x+y) & \text{si } x+y < 0 \end{cases} \end{array} \quad .$$