UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1
Institut Camille Jordan

Travaux dirigés:
Tuna Altınel
Jean-Baptiste Aujogue
Jean-Cristophe Benière

Math IV, Analyse (Printemps 2011) – Fiche 4

21 mars 2011

Exercice 1 (Différentiabilité, simples exemples de différentielles).
Commençons par le rappel de la définition de la différentiabilité :

Définition : (Différentiabilité en un point) *Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$, $U \subset \mathbb{R}^p$ un* <u>*ouvert*</u>*, f une fonction de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^q$ définie sur U, et $a \in U$. La fonction f est dite* différentiable en a *s'il existe une application linéaire notée $df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ telle que*

$$\lim_{x \mapsto a} \frac{||f(x) - f(a) - df(a)(x-a)||_{\mathbb{R}^q}}{||x-a||_{\mathbb{R}^p}} = 0 \ ;$$

en d'autres termes, s'il existe $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ telle que

$$||f(x) - f(a) - df(a)(x-a)|| = o(||x-a||) \ ,$$

soit encore

$$|||f(a+h) - f(a) - df(a)(h)\| = o(\|h\|) \ .$$

L'application linéaire $df(a)$ est dite la différentielle de f en a.

La fonction f est dite différentiable sur U *si elle est différentiable en tout point de U. On note sa différentielle*

$$\begin{array}{rcccl} df & : & U & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q) \\ & & a & \longmapsto & df(a) \ . \end{array}$$

(Pour d'autres notations, voir les notes de cours.)

Déterminer sur quels points de son domaine la fonction f est différentiable, et sa différentielle en ces points en explicitant sa matrice jacobienne :

1. $$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ & & x & \longmapsto & x \end{array} \ ; \quad \begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R}^q \\ & & x & \longmapsto & Ax \end{array} \text{ où } A \text{ est une matrice } q \times p \ ;$$

   $$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R}^q \\ & & x & \longmapsto & c \end{array} \text{ où } c \in \mathbb{R}^q \ ; \quad \begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ & & (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \ ; \quad \begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & xy \end{array} \ ;$$

2. f est une fonction d'une seule variable à valeurs vectorielles

   $$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ & & x & \longmapsto & (f_1(x), \ldots, f_p(x)) \end{array}$$

   avec les f_i qui sont des fonctions à valeurs réelles et dérivables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (La différentielle du produit scalaire).
Dans cet exercice, nous considérons le produit scalaire. En particulier, nous généraliserons la discussion de la fonction produit de l'exercice 1.1.

On fixe $p \in \mathbb{N}^*$ et on définit

$$\begin{array}{cccll} B & : & \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & B(x,y) = x.y = \sum_{i=1}^p x_i y_i \end{array}$$

où $x = (x_1, \ldots, x_p)$ et $y = (y_1, \ldots, y_p)$. Montrer que la différentielle de B au point (x,y) est donnée par l'application linéaire suivante :

$$\begin{array}{cccll} dB & : & \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & dB(x,y)(h,k) = x.k + y.h \quad . \end{array}$$

Exercice 3 (Projetons).
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour chaque $i \in \{1, \ldots, p\}$, on définit la projection

$$\begin{array}{cccll} \pi_i & : & \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_p) & \longmapsto & x_i \quad . \end{array}$$

1. Montrer que π_i est une application différentiable. Déterminer sa différentielle.
2. La différentielle de π_i a une notation particulière : dx_i. Montrer qu'en tout point $a \in \mathbb{R}^p$, le système $(dx_1(a), \ldots, dx_p(a))$ forme une base pour "l'espace tangent", soit encore pour l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$.
3. (Coin culture) Faire le lien avec MATH IV Algèbre.

Exercice 4 (Composons).
I. On définit les deux fonctions suivantes :

$$\begin{array}{cccll} f & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y,z) & \longmapsto & (x^2+y^2+2z^2, x^2-y^2) \end{array} \; ; \quad \begin{array}{cccll} g & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (u,v) & \longmapsto & (\sqrt{u}, \sqrt{u^2+3v^2}, \sqrt{v+2}) \quad . \end{array}$$

1. Déterminer les domaines D_f et D_g de f et de g respectivement. En déduire le domaine de $f \circ g$, noté ci-après $D_{f \circ g}$.
2. Déterminer les plus grandes parties de D_f et de D_g sur lesquelles f et g sont différentiables. Ecrire leurs matrices jacobiennes.
3. Déterminer la plus grande partie de $D_{f \circ g}$ où $f \circ g$ est différentiable. Ecrire sa matrice jacobienne.

II. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction dérivable en tout point de $\mathbb{R}$. On pose $h(u,v) = f(\sin u + \cos v)$. Montrer que

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u,v) \; \sin v \; + \; \frac{\partial h}{\partial v}(u,v) \; \cos u \; = \; 0 \quad .$$

III. (entraînement) Soient $y : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables en tous les points de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement. On pose $h(x) = f(x, y(x, z(x)), z(x))$. Vérifier l'identité suivante :

$$\begin{aligned} h'(x) \; = \; & \partial_1 f(x, y(x,z(x)), z(x)) \; + \\ & \partial_2 f(x, y(x,z(x)), z(x)) \; [\partial_1 y(x,z(x)) + \partial_2 y(x,z(x)) \; z'(x)] \; + \\ & \partial_3 f(x, y(x,z(x)), z(x)) \; z'(x) \quad . \end{aligned}$$