UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1
Institut Camille Jordan

Travaux dirigés:
Tuna Altınel
Jean-Baptiste Aujogue
Jean-Cristophe Benière

Math IV, Analyse (Printemps 2011) – Fiche 5

28 mars 2011

Exercice 1 (Quelques différentielles supplémentaires).
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$. On définit en utilisant f, les fonctions $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$: $u(x) = f(x, -x)$ et $v(x, y) = f(y, x)$. Déterminer leurs différentielles.

Exercice 2 (Les matrices carrées forment un espace normé).
On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on considère la fonction suivante :

$$\begin{array}{cccc} t & : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & A & \longmapsto & \mathrm{tr}(A) \end{array} .$$

Vérifier que cette application est différentiable et déterminer sa différentielle.

Exercice 3 (Coordonnées polaires, sphériques).
1. On définit la fonction

$$\begin{array}{ccccc} P & : & \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}_-^* \} \\ & & (r, t) & \longmapsto & (r\cos t, r \sin t) \end{array} .$$

Vérifier que c'est une fonction différentiable et déterminer sa différentielle.

2. Voici le changement de variables en utilisant les coordonnées sphériques :

$$\begin{array}{ccccc} S & : & \mathbb{R}_+^* \times]0, \pi[\times]0, 2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \mid x \in \mathbb{R}_+\} \\ & & (\rho, \phi, \theta) & \longmapsto & (\rho \sin(\phi)\cos(\theta), \rho\sin(\phi)\sin(\theta), \rho\cos(\phi)) \end{array} .$$

Vérifier que c'est une fonction différentiable et déterminer sa différentielle.

Exercice 4 (Prolongeable, différentiable ?).
On étudiera la fonction suivante :

$$\begin{array}{ccccc} f & : & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \longmapsto & \frac{|xy|^a}{x^2+y^2} \end{array} .$$

1. Pour quelles valeurs de a, la fonction f se prolonge-t-elle par continuité en $(0, 0)$?
2. Dans le cas où f se prolonge par continuité en $(0, 0)$, pour quelles valeurs de a la fonction ainsi obtenue est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
3. Dans le cas où f se prolonge par continuité en $(0, 0)$, pour quelles valeurs de a la fonction ainsi obtenue est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 5 (Dérivées supérieures).
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant $f(x,y) = -f(y,x)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\partial_{11} f(x,x) + \partial_{22} f(x,x) \;=\; 0 \quad \text{et que} \quad \partial_{12} f(x,x) \;=\; 0 \;\; .$$

Exercice 6 (Dérivées partielles et différentielles (entraînement)).
On définit la fonction suivante :

$$\begin{array}{rccc} f \; : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} x^2 & \text{si } |x| > y \\ y^2 & \text{si } |x| \leq y \end{array} \right. \end{array} .$$

1. Etudier la continuité de la fonction f.
2. Etudier l'existence et la continuité des dérivées partielles premières de f.
3. Déterminer la différentielle de f en tout point où celle-ci est différentiable.