UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1
Institut Camille Jordan

Travaux dirigés:
Tuna Altınel
Jean-Baptiste Aujogue
Jean-Cristophe Benière

Math IV, Analyse (Printemps 2011) – Fiche 6

4 avril 2011

Exercice 1 (Ellipse, bel objet).
"*Courbe fermée déterminée par l'intersection d'un cône droit et d'un plan qui n'est pas perpendiculaire à son axe*" est la définition donnée par http ://www.cnrtl.fr/ .

Nous donnerons une définition plus concrète d'une ellipse vu l'outillage analytique et différentielle dont nous sommes en possession. On commence par définir une fonction en utilisant deux constantes $a, b \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{array}{cccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \end{array} .$$

Une *ellipse* est une ligne de niveau $L_d(f)$ ($d \in \mathbb{R}_+^*$) d'une fonction de la forme de f. On déterminera sa forme à l'aide des outils analytiques.

1. Pour chauffer les esprits, vérifier que f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$. Déterminer le gradient en un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. On fixe $d \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer les points d'intersection de $L_d(f)$ avec les deux axes (en d'autres termes, avec les sous-espaces engendrés par les éléments de la base canonique).
3. A l'aide du "vecteur gradient", déterminer l'équation de la droite tangente à l'ellipse $L_d(f)$ en un point (x_0, y_0) sur l'ellipse. Préciser les points où cette droite est verticale (resp. le "vecteur" gradient est horizontal) et horizontale (resp. le "vecteur" gradient est vertical).
4. On suppose $y > 0$. Ecrire y en fonction de x. Déterminer la dérivée de la fonction ainsi obtenue, dresser son tableau de variations. Faire le même pour les points avec $y < 0$ à l'aide des "symétries" de l'ellipse.
5. Comparer les résultats des deux points précédents et tracer l'ellipse sur un plan cartésien.
6. Maintenant, "translater" le centre $(0, 0)$ à un autre point (α, β) et effectuer une "rotation" d'un angle θ. Quelle est la forme de l'image de l'ellipse. Toute ellipse dans $\mathbb{R}^2$ s'obtient de cette manière. Pour en savoir davantage... suivre le cours de géométrie en L3.

Exercice 2 (Géométrie des surfaces).
On définit la fonction suivante dont on étudiera le comportement au voisinage de $(0, 0)$:

$$\begin{array}{cccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{array} \right. \end{array}$$

1. Montrer qu'elle est continue en $(0, 0)$ et que toutes ses dérivées directionnelles y sont définies.

2. Déterminer en tout point de $\mathbb{R}^2$ les dérivées partielles de f. En déduire le vecteur gradient ∇f en tout point de $\mathbb{R}^2$.

3. Montrer que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

4. Dans ce point, on essayera d'étudier la géométrie du manque de différentiabilité vérifié dans le point précédent. Ceci utilise la notion de *(hyper)plan tangent*. On introduit d'abord

$$F : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} - z & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

Le graphe de f est la "surface" de niveau $F(x,y,z) = 0$.

(i) Déterminer le vecteur gradient de F en tout point de $\mathbb{R}^3$.

(ii) A l'aide du point (i), déterminer le plan tangent en $(0,0,0)$, ensuite en tout point de la forme $(0,y_0,0)$ $(y_0 \neq 0)$ et $(x_0,0,0)$ $(x_0 \neq 0)$.

(iii) Faire maintenant tendre x et y vers 0. Quelles sont les conclusions sur les "plans limites" ?

Exercice 3 (Formule de Taylor).

1. Déterminer le polynôme de Taylor d'ordre 2 des fonctions suivantes aux voisinages des points donnés en justifiant qu'on y a droit :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \arctan\left(\frac{1+x}{1-y}\right) \\ & \text{en } (0,0) & \end{array} ; \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{e^x}{\cos(x-y)} \\ & \text{en } (2,2) & \end{array} ;$$

$$k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^y \\ & \text{en } (1,0) & \end{array} ; \qquad l : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x\ln y - y\ln x \\ & \text{en } (1,1) & \end{array} .$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On définit

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{si } x = y \end{cases} . \end{array}$$

   Déterminer les dérivées partielles premières de F en un point de la forme (a,a) avec $a \in \mathbb{R}$ arbitrairement fixé.

Exercice 4 (Hyperplans (entraînement)).
Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ arbitraire. Refaire la preuve du théorème 63 (page 17) des notes de cours ainsi que les parties 4.4 B et C (pages 20, 21) sans utiliser les dérivées partielles.