UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1
Institut Camille Jordan

Travaux dirigés:
Tuna Altınel
Jean-Baptiste Aujogue
Jean-Cristophe Benière

Math IV, Analyse (Printemps 2011) – Fiche 7

11 avril 2011

Exercice 1 (Extréma locaux/globaux).
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer les extréma locaux de la fonction f.
2. La fonction f possède-t-elle des extréma globaux sur $\mathbb{R}^2$?
3. Représenter le segment de droite L défini par

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ -2 \leq x \leq 0,\ y = x + 1\}$$

et déterminer les extréma globaux de la restriction de f à L en précisant en quels points de L ils sont atteints.

Exercice 2 (Extréma locaux/globaux).
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + x^2y^2 - x^4 - y^4$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer les extréma locaux de f.
2. A l'aide des coordonnées polaires, vérifier que $f(x, y) \leq 2r^2 - \frac{r^4}{4}$ où $r^2 = x^2 + y^2$. En déduire que $f(x, y) \leq 4$.
3. Trouver le maximum global de f et les points où il est atteint.
4. Y a-t-il un minimum global ?

Exercice 3 (Extréma locaux/globaux).
On définit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f(x, y) = x(x^2 + y^2 - 2x)$.

1. Vérifier que f n'a pas d'extrémum en $(0, 0)$.
2. Si D est une droite passant par $(0, 0)$ montrer que la restriction de f à D admet un maximum en $(0, 0)$.

Exercice 4 (Extréma sur un compact).
Déterminer les bornes de la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x, y) = 3xy - 3x^2 - y^3$$

sur le compact $K = [-1, 1] \times [-1, 1]$.

Exercice 5 (Extréma sur un compact).
Déterminer sur le compact $K = [0, 1] \times [0, 1]$ la borne supérieure de la fonction suivante :

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \longmapsto & \begin{cases} x(1 - y^2) & \text{si } x \leq y \\ y(1 - x^2) & \text{si } x > y \end{cases} . \end{array}$$

Exercice 6 (Extréma liés).
(1) Soient $s \in \mathbb{R}_+^*$ et $D = \{(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \mid x_1 + \ldots + x_n = s\}$. Soit $f : (\mathbb{R}_+^*)^n \to \mathbb{R}_+$ la fonction définie par $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \ldots x_n$. En utilisant les multiplicateurs de Lagrange, trouver la valeur maximale atteinte par f sur l'ensemble D.

(2) En déduire que, pour tous $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$, on a l'inégalité : $(x_1 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$.

Exercice 7 (Extréma liés (entraînement)).
On définit la fonction

$$\begin{array}{rccl} h & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & e^{(x^2+y^2-4)^2} \end{array} .$$

1. Déterminer les points critiques de la fonction h ainsi que la nature de ces points.
2. On considère le domaines D de $\mathbb{R}^2$ défini par la relation

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1 \right\} .$$

Montrer que le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 2 est inclus dans D, puis déterminer les extréma de h sur le domaine D.

Exercice 8 (Extréma locaux/globaux (entraînement)).
On définit la fonction suivante :

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & (x^4+y^4+1)e^{-(x^2+y^2)} \end{array}$$

1. Vérifier que $f(x,y) = f(-x,-y) = f(x,-y) = f(-x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2. (3 pts) Vérifier que les points critiques de f sont $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$, $(0,0)$.
3. Vérifier, en précisant si c'est un minimum ou maximum, que f admet un extrémum local en $(0,0)$.
4. Montrer que la restriction de f à la droite

$$\{ (x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \}$$

   est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. En déduire que f n'admet pas d'extremum en $(1,0)$.
5. Déterminer si f admet un extrémum aux points critiques restants.