UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1
Institut Camille Jordan

Travaux dirigés:
Tuna Altınel
Jean-Baptiste Aujogue
Jean-Cristophe Benière

Math IV, Analyse (Printemps 2011) – Fiche 8

2 mai 2011

Rappel : *Champs de vecteurs... Nombre de notations, de flèches, d'appellations physiques vont avec. Il suffit, et il est fort nécessaire, de ne pas oublier qu'il s'agit des fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$ pour $p \in \mathbb{N}^*$ fixé. Vous en avez vu tant, l'un des objectifs de cette fiche est de les étudier à travers les nouvelles notions.*

Exercice 1 (Coordonnées polaires).
On définit le champ de vecteurs suivant

$$\begin{array}{cccll} \mathcal{P} & : & \mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \ \setminus \ \mathbb{R}_+ \times \{0\} \\ & & (r, t) & \longmapsto & (r \cos t, r \sin t) \ . \end{array}$$

Vous le connaissez sous son appellation informelle, "coordonnées polaires" sans réduction de domaine ni d'image directe. C'est bel et bien un champ de vecteurs. Les contraintes imposées sur les ensembles de départ et d'arrivée permettent une étude plus fine.

1. Tracer un rectangle $ABCD$ dans le domaine de $\mathcal{P}$, disons avec les quatre coins $A(a, b)$, $B(a + h, b)$, $C(a + h, b + k)$ et $D(a, b + k)$, $h, k \in \mathbb{R}_+^*$ de façon à ce que tous les points restent dans le domaine. Déterminer $\mathcal{P}(ABCD)$ et le tracer sur le plan d'arrivée.
2. Montrer que $\mathcal{P}$ est une bijection.
3. Montrer que $\mathcal{P}$ est différentiable sur son domaine et déterminer sa différentielle.
4. Etant bijective sur son domaine, $\mathcal{P}$ a un inverse $\mathcal{P}^{-1}$. Déterminer-le.
5. Vérifier que $\mathcal{P}^{-1}$ est différentiable sur l'ensemble d'arrivée de $\mathcal{P}$ et déterminer $\mathrm{d}\,\mathcal{P}^{-1}$.
6. On fixe un point $(a, 0)$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer les limites suivantes : $\lim_{(x,y)\to(a,0^-)} \mathcal{P}^{-1}(x, y)$ et $\lim_{(x,y)\to(a,0^+)} \mathcal{P}^{-1}(x, y)$. La fonction $\mathcal{P}^{-1}$ est-elle prolongeable par continuité à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$?
7. Vérifer si $\mathcal{P}$ est un champ de gradient.
8. Proposer une définition pour la divergence en dimension 2. Déterminer la divergence de $\mathcal{P}$.

Exercice 2 (Coordonnées sphériques).
Un autre changement de systèmes de coordonnées, ou de variables comme on le dit parfois. On définit

$$\begin{array}{cccll} \mathcal{S} & : & \mathbb{R}_+^* \times]0, \pi[\times]0, 2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \ \setminus \ \mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R} \\ & & (\rho, \phi, t) & \longmapsto & (\ \rho\ \sin\phi\ \cos t\ ,\ \rho\ \sin\phi\ \sin t\ ,\ \rho\ \cos\phi\ )\ . \end{array}$$

1. Faire les cinq premiers points de l'exercice précédent mutatis mutandis.
2. On fixe un point $(a, 0, 0)$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer les limites suivantes : $\lim_{(x,y,z)\to(a,0^-,0)} \mathcal{S}^{-1}(x, y, z)$ et $\lim_{(x,y,z)\to(a,0^+,0)} \mathcal{S}^{-1}(x, y, z)$. La fonction $\mathcal{S}^{-1}$ est-elle prolongeable par continuité à $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$?
3. Déterminer la divergence et le rotationnel de $\mathcal{S}$.
4. Déterminer si $\mathcal{S}$ est un champ de gradient ?

Exercice 3 (Coordonnées cylindriques (entraînement)).
Encore des coordonnées...

$$\mathcal{S} \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times]0,2\pi[\times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \ \setminus \ \mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R} \\ (r,t,z) & \longmapsto & (\ r \ \sin t \ , r \ \cos t \ , \ z) \end{array} .$$

Formulez vos questions vous-même, trouvez des réponses.

Exercice 4 (Rotationnel des champs linéaires).

1. Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ et $x_0 \in \mathbb{R}^3$. On définit $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ par, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t)$ est l'image de x_0 par la rotation d'axe $e_3 = (0,0,1)$ et d'angle ωt. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\mathrm{d}X(t) \ = \ \omega e_3 \wedge X(t) \ .$$
2. Soit $\Omega \in \mathbb{R}^3$. On définit $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, X \to \Omega \wedge X$. Montrer que $\mathrm{rot}(V)$ est constant, égal à 2Ω. Faire le lien avec le point précédent.

Exercice 5 (Exercices de calcul).
Déterminer si les champs suivants sont des champs de gradients, et si oui, déterminer leurs potentiels scalaires.

1. $V(x,y) = (y,x)$,
2. $V(x,y) = (3x^2y + 2x + y^3, x^3 + 3xy^2 - 2y)$,
3. $V(x,y) = (\cos(x), \sin(y))$,
4. $V(x,y) = (y + \frac{1}{x}, x + \frac{1}{y})$,
5. $V(x,y) = (x+y, x-y)$,
6. $V(x,y,z) = (x^2 - yz, y^2 - zx, z^2 - xy)$.

Exercice 6 (Champs centraux).
Un champ central dans $\mathbb{R}^3$ est défini par une application $V : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de la forme $V(x) = f(r)x$, où $x \in \mathbb{R}^3$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ et f est une application dérivable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'un champ central est toujours un champ de gradient et calculer le potentiel dont il est issu.