UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1
Institut Camille Jordan

Travaux dirigés:
Tuna Altınel
Jean-Baptiste Aujogue
Jean-Cristophe Benière

Math IV, Analyse (Printemps 2011) – Fiche 9

9 mai 2011

Exercice 1 (Formes différentielles : calculs élémentaires).
I. Evaluez les formes ci-dessous aux vecteurs indiqués de l'espace tangent au point donné :

1. $\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}x_2$, $\mathrm{d}x_3$, $\mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}x_2$, $x_1\,\mathrm{d}x_1 + x_2\,\mathrm{d}x_2 + x_3\,\mathrm{d}x_3$ en e_i ($i \in \{1,2,3\}$) de l'espace tangent en $(1,1,1)$;
2. $\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3$, $\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$, $x_1\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$, $\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$, $x_1\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_2$ aux paires (e_i, e_j) $(1 \leq i < j \leq 3)$ de l'espace tangent en $(0,0,0)$, ensuite de celui en $(1,1,1)$;
3. $\mathrm{d}f$ avec $f(x_1,\ldots,x_p) = \sum_{i=1}^{p} ix_i$ en $(1,-1,\ldots,(-1)^{p-1})$ de l'espace tangent en $(1,1,\ldots,1)$ dans $\mathbb{R}^p$ $(p \in \mathbb{N}^*)$.

II. Soit $\omega \in \Omega^k(U)$ avec U un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Montrer $\omega \wedge \omega = 0$ si k est impair. Donner des exemples qui réfutent cette conclusion quand k est pair.

III. Dans $\bigcup_{k=0}^{+\infty} \Omega^k(\mathbb{R}^3)$, on se donne les formes suivantes :

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= x^2 + y^2 + z^2 \\
\omega_2 &= yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z \\
\omega_3 &= xy\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + xz\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + yz\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\
\omega_4 &= x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\
\omega_5 &= (x^5 + y^4 x)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z
\end{aligned}$$

1. Calculer $\omega_i + \omega_j$ pour $(1 \leq i \leq j \leq 5)$ quand c'est possible.
2. Calculer $\omega_i \wedge \omega_j$ pour $(1 \leq i, j \leq 5)$.
3. Calculer $\mathrm{d}\omega_i$ pour $(1 \leq i \leq 5)$.

Exercice 2 (Calculs en utilisant le théorème de Fubini).
Calculer les intégrales suivantes :

$$\iint_D (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\ ,\ D \text{ est limité par les courbes } x = 0\ ,\ y = x+2\ ,\ y = -x\ ,$$

$$\iint_D x\cos(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\ ,\ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \leq x \leq \sin(y)\ ,\ 0 \leq y \leq \pi/2\}\ ,$$

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\ ,\ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1\ ,\ x + \sqrt{3}y \leq 1\}\ ,$$

$$\iiint_D x^2 y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\ ,\ D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ 0 \leq y \leq 1 - x^2\ ,\ |x+y+z| \leq 1\}\ .$$

Exercice 3 (Changement de variables).

1. Calculer l'aire de la région dans $\mathbb{R}^2$ limitée par les courbes d'équation
$$y = ax \ , \ y = x/a \ , \ y = b/x \ , y = 1/bx \ , \text{ où } \ a > 1 \ , \ b > 1 \ .$$
2. Calculer l'intégrale
$$\iiint_D \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2} \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y \ \mathrm{d}z \ ,$$
où D est l'intérieur de la sphère de centre $(0,0,0)$ et de rayon 1, et extérieur au cône de révolution autour de l'axe des z (troisième coordonnée) et d'angle $\pi/3$.
3. Calculer le volume du domaine D défini par l'intersection d'une sphère de rayon $R > 0$ et d'un cylindre de révolution de rayon $R' > 0$, avec $R' < R$, ayant pour axe un diamètre de la sphère.

Exercice 4.
Calculer l'intégrale :
$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \ \mathrm{d}x \quad .$$

Exercice 5 (Là où Fubini ne s'applique pas (entraînement pour les curieux)).
Montrer que les intégrales suivantes ne sont pas égales :
$$\int_0^1 \Big[\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \ \mathrm{d}x \Big] \ \mathrm{d}y \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \Big[\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \ \mathrm{d}y \Big] \ \mathrm{d}x \ ,$$
et expliquer pourquoi le théorème de Fubini n'est pas applicable.

<u>Indication</u> : On commencera par calculer les dérivées
$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big) \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\arctan(x)\big) \ .$$