Kholle 10 (rattrapage), le 24 mai 2011

Exercice 1 (Question de cours)
(i) (3 pts) Donner la définition d'une k-forme antisymétrique. Donner la définition d'un champ de gradient.
(ii) (3 pts) Indiquer lesquels des énoncés suivants sont vrais, lesquels sont faux ? Aucune justification n'est nécessaire.

1. La divergence d'un champ de vecteurs est un champ de vecteurs.
2. Si ω est une forme différentielle, alors $\omega \wedge \omega = 0$.
3. La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est un champ de vecteurs.

Exercice 2 (5 pts) Calculer l'intégrale suivante :

$$\iint_D (x+2y)^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{où } D \text{ est le triangle de sommets } \ (0,0)\ ,\ (1,1)\ ,\ (2,-1)\ .$$

Exercice 3 (9 pts) On définit la fonction

$$\begin{array}{cccc} \Phi & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \longmapsto & (u,v) \end{array} \quad ,$$

avec $u(x,y) = x + y$ et $v(x,y) = xy$.

1. (2 pts) Vérifier que Φ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer sa matrice jacobienne en un point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2. (2 pts) Déterminer l'ensemble $\mathcal{R}$ des points où la matrice jacobienne de Φ est inversible. Déterminer cet inverse en fonction de x et de y.
3. (3 pts) En considérant les racines du polynôme $T^2 - uT + v$, exprimer (x,y) en fonction de u et v. Déterminer les points (x,y) pour lesquels la solution est unique.
4. (2 pts) Déterminer l'inverse de la matrice jacobienne, quand celle-ci est inversible, en fonction de u et de v.