Kholle 10 (rattrapage), le 24 mai 2011

Exercice 1 (Question de cours)

(i) (3 pts) Enoncer le théorème de Fubini pour un rectangle.

(ii) (3 pts) Indiquer lesquels des énoncés suivants sont vrais, lesquels sont faux ? Aucune justification n'est nécessaire.

1. Une fonction continue sur son domaine y est intégrable.
2. Une k-forme différentielle ω est exacte si $\mathrm{d}\omega = 0$.
3. Le rotationnel associe à tout champ de vecteurs différentiable dans $\mathbb{R}^3$ un nouveau champ de vecteurs.

Exercice 2 (3 pts) On définit

$$\begin{array}{rccl} \Phi & : & \mathbb{R}^2 \setminus \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\ \} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \setminus \{\ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid uv = 0\ \} \\ & & (x,y) & \longmapsto & (u,v)\ , \end{array}$$

avec $u(x,y) = x$ et $v(x,y) = x/y$.

Soit f une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$. On pose $F = f \circ \Phi$. Déterminer les dérivées partielles premières de F par rapport à x et y en fonction de celles de f par rapport à u et v.

Exercice 3 (11 pts) On définit

$$\begin{array}{rcccl} \mathcal{S} & : & \mathbb{R}_+^* \times]0,\pi[\times]0,2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^3\ \setminus\ \mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R} \\ & & (\rho,\phi,t) & \longmapsto & (\ \rho\ \sin\phi\ \cos t\ ,\ \rho\ \sin\phi\ \sin t\ ,\ \rho\ \cos\phi\ )\ . \end{array}$$

1. (2 pts) Montrer que $\mathcal{S}$ est une bijection.
2. (4 pts) Montrer que $\mathcal{S}$ est différentiable sur son domaine et déterminer sa différentielle.
3. (3 pts) Déterminer la divergence et le rotationnel de $\mathcal{S}$.
4. (2 pts) Déterminer si $\mathcal{S}$ est un champ de gradient ?