Kholle 11, le 24 mai 2011

Exercice 1 (Question de cours)

(i) (3 pts) Donner la définition d'une k-forme antisymétrique. Donner la définition d'un champ de gradient.

(ii) (3 pts) Indiquer lesquels des énoncés suivants sont vrais, lesquels sont faux ? Aucune justification n'est nécessaire.

1. La divergence d'un champ de vecteurs est un champ de vecteurs.
2. Si ω est une forme différentielle, alors $\omega \wedge \omega = 0$.
3. La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est un champ de vecteurs.

Exercice 2 (3 pts) Déterminer l'aire de la région délimitée par les courbes $y = x^2 + 9$, $y = x^2 - 9$, $x = -1$, $x = 1$.

Exercice 3 (5 pts) On définit

$$\begin{array}{cccccc} \mathcal{P} & : & \mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_+ \times \{0\} & \\ & & (r,t) & \longmapsto & (r\cos t, r\sin t) & . \end{array}$$

1. (2 pts) Montrer, en utilisant seulement la définition de la dérivée d'une fonction d'une seule variable, que la fonction $t \mapsto \sin(t)$ est une fonction dérivable pour tout $t \in \mathbb{R}$.
(*Aide-mémoire* : $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.)
2. (3 pts) Montrer que $\mathcal{P}$ est différentiable sur son domaine et déterminer sa différentielle
(*Pour la différentiabilité, vous êtes libre d'utiliser la méthode qui vous convient le plus*).

Exercice 4 (6 pts) Calculer l'intégrale suivante :

$$\iint_D |x-y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{où} \quad D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le a \ , \ 0 \le y \le b \} \quad \text{et} \quad 0 < b < a \ .$$