
Kholle 11, le 24 mai 2011

Exercice 1 (Question de cours)

- (i) (3 pts) Ecrire la formule de changement de variables pour les intégrales multiples définies sur \mathbb{R}^2 .
(ii) (3 pts) Enoncer le théorème de Green-Riemann.

Exercice 2 (3 pts) Calculer l'intégrale suivante :

$$\iint_D xy \, dx \, dy \quad \text{où } D \text{ est la trapèze délimitée}$$

par les courbes d'équations respectives $y = 0$, $y = 1$, $y = 2 - x$, $y = 1 + \frac{x}{2}$.

Exercice 3 (5 pts) Calculer l'intégrale suivante :

$$\iint_D (x + y) \, dx \, dy \quad \text{où } D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 + |x| \}.$$

Exercice 4 (6 pts) L'hélice circulaire à pas constant est définie par l'application suivante :

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \\ z = ht \end{cases} \end{aligned}$$

avec $r, h \in \mathbb{R}_+^*$.

- (2 pts) Montrer que le vecteur tangent à l'hélice en tout point de celle-ci fait un angle constant avec le vecteur vertical $(0, 0, 1)$.
- (2 pts) Calculer la longueur d'une spire de l'hélice ($t \in [0, 2\pi]$).
- (2 pts) Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{\gamma} (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$$