Kholle 5, le 5 avril 2011

Exercice 1 (Question de cours)

(i) (3 pts) Donner la définition de la dérivée directionnelle d'une fonction $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ ($p \in \mathbb{N}^*$) en un point de $\mathbb{R}^p$.

(ii) (4 pts) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable au voisinage d'une point $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Donner, en justifiant votre réponse, l'équation du plan tangent en ce point.

Exercice 2 (6 pts)

1. (3 pts) Déterminer les différentielles des fonctions suivantes :

$$(x,y) \mapsto xy \quad ; \quad (x,y) \mapsto x+y \quad ; \quad (x,y) \mapsto (\sin(xy), x^2-y^2) \quad .$$

2. (3 pts) Déterminer, sans déterminer de domaines, les Jacobiennes des fonctions suivantes ainsi que celui de $f \circ g$:

$$\begin{array}{rrcl} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \longmapsto & (u+v, uv) \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{rrcl} g : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \longmapsto & (\cos(u)+\sin(v), \sin(u)\cos(v)) \end{array} \quad .$$

Exercice 3 (7 pts)

1. (3 pts) Etudier la continuité de la fonction suivante en tout point de la forme (a,a) ou $(a,-a)$:

$$\begin{array}{rrcl} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2-y^2} & \text{si } x^2 \neq y^2 \\ 0 & \text{si } x^2 = y^2 \end{cases} \end{array}$$

2. (4 pts) On définit

$$\begin{array}{rrcl} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} x^2 & \text{si } y < x^2 \\ y & \text{si } y \geq x^2 \end{cases} \end{array}$$

Déterminer les dérivées partielles de f sur les points de la courbe

$$\mathcal{C} = \{ (x, x^2) \mid x \in \mathbb{R} \}$$

en précisant quand elles n'existent pas.