Kholle 5, le 5 avril 2011

Exercice 1 (Question de cours)

(i) (3 pts) Soit $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Donner la définition de la dérivée partielle par rapport à une variable de f en un point $a = (a_1, \ldots, a_p)$ du domaine de f.

(ii) (4 pts) Dans l'espace normé $\mathbb{R}^2$, en n'utilisant que la définition de la différentiabilité, montrer que la multiplication $m : (x, y) \longmapsto x.y$ est une application différentiable partout.

Exercice 2 (3 pts) Montrer que la fonction suivante est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$ de la forme (y^2, y) ou $(-y^2, y)$.

$$\begin{array}{rcll} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto \begin{cases} 2y & \text{si } x \geq y^2 \\ \frac{2x}{y} & \text{si } |x| \leq y^2 \text{ et } y \neq 0 \\ -2y & \text{si } x \leq -y^2 \end{cases} \end{array}$$

Exercice 3 (10 pts) On définit les deux fonctions suivantes :

$$\begin{array}{rcll} F & : & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\} & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \longmapsto (x^2 - y^2, \frac{y}{x}) \end{array} \; ; \quad \begin{array}{rcll} G & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & & (u,v) & \longmapsto (v\cos(u), v\sin(u)) \end{array} .$$

1. (2 pts) Déterminer le domaine de la composée $F \circ G$.
2. (2 pts) Montrer que $F \circ G$ est différentiable sur son domaine.
3. (3 pts) Déterminer les différentielles de F et de G.
4. (3 pts) Déterminer $d(F \circ G)(a)$ avec $a = (a_1, a_2)$.