
Kholle 5, le 5 avril 2011

Exercice 1 (Question de cours)

(i) (3 pts) Donner la définition de la différentiabilité d'une fonction $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ($p, q \in \mathbb{N}^*$) en un point a de son domaine.

(ii) (4 pts) Soient $f, g : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ deux fonctions différentiables partout. Montrer que leur somme aussi est différentiable partout.

Exercice 2 (6 pts) On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ des matrices 2 par 2 à valeurs réelles (on admettra que $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ muni des opérations usuelles est un espace vectoriel).

- (2 pts) Quelle est la dimension de cet espace? Expliciter une base (il n'est pas nécessaire de justifier que celle-ci est une base).
- (2 pts) On fixe $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Montrer que les limites

$$\lim_{H \rightarrow 0} A.H \quad \text{et} \quad \lim_{H \rightarrow 0} H.A$$

sont la matrice nulle.

- (2 pts) Dédurre du point précédent que l'application suivante est continue en tout point (toute matrice) A de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$:

$$f : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \\ A \longmapsto A^2 .$$

Exercice 3 (7 pts)

- (4 pts) Suivant les valeurs de $p \in \mathbb{R}$, déterminer quand la limite suivante existe et sa valeur

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|\sin(x+y)|^p}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

- (3 pts) Etudier si la fonction suivante est différentiable en $(0,0)$:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$