Kholle 5, le 5 avril 2011

Exercice 1 (Question de cours)

(i) (3 pts) Donner la définition de la différentiabilité d'une fonction $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ($p, q \in \mathbb{N}^*$) en un point a de son domaine.

(ii) (4 pts) Soient $p \in \mathbb{N}^*$, U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur U. Soient $v \in \mathbb{R}_p$, $a \in \mathbb{R}^p$. On définit

$$\begin{array}{rccc} \gamma & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & U \\ & & h & \longmapsto & a + hv \ , \end{array}$$

et on pose $F = f \circ \gamma$. Déterminer la dérivée de F en un point $h \in \mathbb{R}$ en fonction des différentielles de f et de γ. Expliciter la représentation matricielle de la différentielle de γ au point h.

Exercice 2 (4 pts) On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on considère la fonction suivante :

$$\begin{array}{rcccc} t & : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & A & \longmapsto & \operatorname{tr}(A) \ . \end{array}$$

Vérifier que cette application est différentiable et déterminer sa différentielle.

Exercice 3 (9 pts)

1. (3 pts) Etudier la continuité de la fonction suivante en tout point de la forme (a, a) ou $(a, -a)$:

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2-y^2} & \text{si } x^2 \neq y^2 \\ 0 & \text{si } x^2 = y^2 \end{cases} \end{array}$$

2. (6 pts) On définit

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & \sin(|xy|) \end{array}$$

   Etudier les dérivées partielles de f en tous les points de $\mathbb{R}^2$. Déterminer si cette fonction est différentiable en $(0,0)$.