Kholle 4, le 5 avril 2011

Exercice 1 (Question de cours)

(i) (3 pts) Donner la définition de la dérivée directionnelle d'une fonction $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ ($p \in \mathbb{N}^*$) en un point de $\mathbb{R}^p$.

(ii) (4 pts) Soient $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ une fonction différentiable partout et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction λf est différentiable partout.

Exercice 2 (6 pts)

1. (4 pts) On définit la fonction suivante :

$$\begin{array}{cccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} y^3 & \text{si } y > 2x+1 \\ x^3 & \text{si } y \leq 2x+1 \end{cases} \end{array}$$

Etudier la continuité de f en tout point de $\mathbb{R}^2$ de la forme $(x, 2x+1)$.

2. (2 pts) Etudier la limite suivante :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{|x-y|} \quad .$$

Exercice 3 (7 pts)

$$\begin{array}{cccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

1. (3 pts) Déterminer les dérivées partielles de f en tous les points de $\mathbb{R}^2$.
2. (2 pts) Déterminer si f est différentiable en $(0,0)$.
3. (2 pts) Déterminer si f est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $(0,0)$.