Kholle 5, le 5 avril 2011

Exercice 1 (Question de cours)

(i) (3 pts) Soit $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Donner la définition de la dérivée partielle par rapport à une variable de f en un point $a = (a_1, \dots, a_p)$ du domaine de f.

(ii) (4 pts) Dans l'espace normé $\mathbb{R}^2$, en n'utilisant que la définition de la différentiabilité, montrer que la multiplication $m : (x, y) \longmapsto x.y$ est une application différentiable partout.

Exercice 2 (6 pts)

1. (3 pts) Déterminer les différentiels des fonctions suivantes :

$$f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R}^q \\ x & \longmapsto & c \end{array} \text{ où } c \in \mathbb{R}^q \;;\quad f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R}^q \\ x & \longmapsto & Ax \end{array} \text{ où } A \text{ est une matrice } q \times p\,.$$

2. (3 pts) Déterminer, sans déterminer de domaines, les Jacobiennes des fonctions suivantes ainsi que celui de $f \circ g$:

$$f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x^2 + y^2, \frac{z}{x^2+y^2}) \end{array} \;;$$

$$g \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, v, w) & \longmapsto & (w\cos(u)\sin(v), w\sin(u)\sin(v), w\cos(v)) \end{array} \,.$$

Exercice 3 (7 pts)

1. (3 pts) Etudier la continuité de la fonction suivante en $(0, 0)$:

$$f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{e^{x^2 y} - 1}{xy} & \text{si } xy \neq 0 \\ x & \text{si } xy = 0 \end{cases} \end{array}$$

2. (4 pts) On définit

$$f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array}$$

Etudier les dérivées partielles de f en tous les points de $\mathbb{R}^2$.