**Kholle 6, le 12 avril 2011**

**Exercice 1** (Question de cours)
(i) (3 pts) Soit $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Donner la définition de la dérivée partielle par rapport à une variable de $f$ en un point $a = (a_1, \dots, a_p)$ du domaine de $f$.
(ii) (4 pts) Dans l'espace normé $\mathbb{R}^2$, en n'utilisant que la définition de la différentiabilité, montrer que la multiplication $m : (x, y) \longmapsto x.y$ est une application différentiable partout.

**Exercice 2** (3 pts) Montrer que la fonction suivante est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$ de la forme $(y^2, y)$ ou $(-y^2, y)$.

$$\begin{array}{rcl} f \ : \ \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} 2y & \text{si } x \geq y^2 \\ \frac{2x}{y} & \text{si } |x| \leq y^2 \text{ et } y \neq 0 \\ -2y & \text{si } x \leq -y^2 \end{cases} \end{array}$$

**Exercice 3** (10 pts) On définit

$$\begin{array}{rcl} f \ : \ \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

1. (4 pts) En quels points de $\mathbb{R}^2$, $f$ est-elle différentiable ? Déterminer en ces points la différentielle de $f$.
2. (3 pts) En quels points de $\mathbb{R}^2$ $f$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ ?
3. (3 pts) Déterminer les dérivées partielles secondes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

en $(0, 0)$.