Kholle 6, le 12 avril 2011

Exercice 1 (Question de cours)

(i) (3 pts) Donner la définition de la différentiabilité d'une fonction $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ $(p, q \in \mathbb{N}^*)$ en un point a de son domaine.

(ii) (4 pts) Soient $f, g : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ deux fonctions différentiables partout. Montrer que leur somme aussi est différentiable partout.

Exercice 2 (3 pts) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow$ une fonction différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$. On définit aussi

$$\begin{array}{cccc} g & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & (y,x)\ . \end{array}$$

1. (1 pts) Déterminer la matrice jacobienne de $f \circ g$ en un point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
2. (2 pts) On suppose que $f(x,y) = -f(y,x)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. En comparant les jacobiennes de f et de $f \circ g$, vérifier qu'en pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \ = \ -\frac{\partial f}{\partial y}(b,a)\ .$$

Exercice 3 (10 pts)

1.

(i) (3 pts) Déterminer les dérivées partielles premières de la fonction suivante en tous les points de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{cl} y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

(ii) (4 pts) Déterminer en quels points ces dérivées partielles sont continues.

2. (3 pts) Etudier si la fonction suivante est différentiable en $(0,0)$:

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{cl} \frac{x^3 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{array} \right. \end{array}$$