
Kholle 6, le 12 avril 2011

Exercice 1 (Question de cours)

(i) (3 pts) Donner la définition de la dérivée directionnelle d'une fonction $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ ($p \in \mathbb{N}^*$) en un point de $\mathbb{R}^p$.

(ii) (4 pts) Soit $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^p$. Montrer que si f admet un extrémum un un point $a \in U$, alors a est un point critique de f.

Exercice 2 (6 pts)

1. (4 pts) On définit

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} x^2 & \text{si } y < x^2 \\ y & \text{si } y \geq x^2 \end{array} \right. \end{array}$$

Déterminer les dérivées partielles de f sur les points de la courbe

$$\mathcal{C} \;=\; \{\ (x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\ \}$$

en précisant quand elles n'existent pas.

2. (2 pts) Etudier la limite suivante :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{|x-y|} \quad .$$

Exercice 3 (7 pts)

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{array} \right. \end{array}$$

1. (3 pts) Déterminer les dérivées partielles de f en tous les points de $\mathbb{R}^2$.
2. (2 pts) Déterminer si f est différentiable en $(0,0)$.
3. (2 pts) Déterminer si f est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $(0,0)$.