Kholle 6, le 12 avril 2011

Exercice 1 (Question de cours)

(i) (3 pts) Soit $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Donner la définition de la dérivée partielle par rapport à une variable de f en un point $a = (a_1, \ldots, a_p)$ du domaine de f.

(ii) (4 pts) Dans l'espace normé $\mathbb{R}^2$, en n'utilisant que la définition de la différentiabilité, montrer que la multiplication $m : (x, y) \longmapsto x.y$ est une application différentiable partout.

Exercice 2 (6 pts)

1. (3 pts) On définit la fonction "déterminant" :

$$\begin{array}{ccccc} \Delta & : & \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & A & \longmapsto & \det(A)\ . \end{array}$$

   Déterminer la matrice jacobienne de Δ en un point de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

2. (3 pts) Déterminer, sans déterminer de domaines, les Jacobiens des fonctions suivantes ainsi que celui de $f \circ g$:

$$\begin{array}{ccccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (u, v) & \longmapsto & (u + v, uv) \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{ccccc} g & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & u & \longmapsto & (\sin(xy), x^2 - y^2) \end{array} \quad .$$

Exercice 3 (7 pts)

1. (3 pts) Etudier la continuité de la fonction suivante en tout point de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{ccccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \longmapsto & \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2+y^2-1}} & \text{si } x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & \text{si } x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases} \end{array}$$

2. (4 pts) On définit

$$\begin{array}{ccccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \longmapsto & \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array}$$

   Etudier les dérivées partielles de f en tous les points de $\mathbb{R}^2$.