Kholle 6, le 12 avril 2011

Exercice 1 (Question de cours)
(i) (3 pts) Donner la définition de la différentiabilité d'une fonction $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ $(p, q \in \mathbb{N}^*)$ en un point a de son domaine.
(ii) (4 pts) Soit $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ une fonction *linéaire*. Montrer que f différentiable en tout point de $\mathbb{R}^p$.

Exercice 2 (6 pts) On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ des matrices 2 par 2 à valeurs réelles (on admettra que $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ muni des opérations usuelles est un espace vectoriel).

1. (2 pts) Quelle est la dimension de cet espace ? Expliciter une base (il n'est pas nécessaire de justifier que celle-ci est une base).
2. (2 pts) On fixe $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Montrer que les limites
$$\lim_{H\to 0} A.H \quad \text{et} \quad \lim_{H\to 0} H.A$$
sont la matrice nulle.
3. (2 pts) Déduire du point précédent que l'application suivante est continue en tout point (toute matrice) A de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$:
$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \\ & & A & \longmapsto & A^2\ . \end{array}$$

Exercice 3 (7 pts) On définit les deux fonctions suivantes :
$$\begin{array}{rcccc} F & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (x,y) & \longmapsto & (x+2y, x-y^2, x^2+y) \end{array} \ ; \quad \begin{array}{rcccc} G & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (u,v) & \longmapsto & (u+2v, 2u-v^2) \end{array} \ .$$

1. (4 pts) Déterminer les différentielles de F et de G.
2. (3 pts) Déterminer $d(F(G(U))$ en $U = (u, v)$.