Kholle 7, le 19 avril 2011

Exercice 1 (Question de cours)

(i) (3 pts) Qu'est-ce qu'un champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^p$? Définir l'opérateur ∇ dans $\mathbb{R}^p$.

(ii) (3 pts) Indiquer lesquels des énoncés suivants sont vrais, lesquels sont faux ? Aucune justification n'est nécessaire.

1. Le rotationnel d'un champ de vecteurs est orthogonal à la direction déterminée par ce champ.
2. La matrice hessienne d'une fonction différentiable est diagonalisable avec des valeurs propres réelles.
3. Une fonction qui a toutes ses dérivées partielles en un point est continue en ce point.

Exercice 2 (3 pts) Etudier la continuité de la fonction suivante ainsi que ses dérivées partielles premières en $(0,0)$.

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} (x^2+y^2)^x & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

Exercice 3 (4 pts) On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on considère la fonction suivante :

$$\begin{array}{rccl} t & : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & A & \longmapsto & \operatorname{tr}(A) \end{array} .$$

Vérifier que cette application est différentiable et déterminer sa différentielle.

Exercice 4 (7 pts) On définit

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & 2x^3+6xy-3y^2+2 \end{array} .$$

1. (5 pts) Déterminer les extréma locaux de la fonction f.
2. (2 pts) Etudier les extréma globaux de f sur $\mathbb{R}^2$ en justifiant votre réponse.