Kholle 7, le 19 avril 2011

Exercice 1 (Question de cours)

(i) (3 pts) Donner la définition de la divergence d'un champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^p$. Donner la définition du rotationnel d'un champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$.

(ii) (3 pts) Indiquer lesquels des énoncés suivants sont vrais, lesquels sont faux ? Aucune justification n'est nécessaire.

1. Les dérivées partielles d'une fonction différentiable sur un voisinage sont continues sur ce voisinage.
2. La matrice jacobienne d'une fonction différentiable est diagonalisable.
3. Soit F une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^p$. Si $dF(X) = 0$, alors F atteint un extrémum en X.

Exercice 2 (3 pts) Etudier la continuité de la fonction suivante en tout point de la forme (a, a) ou $(a, -a)$:

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2-y^2} & \text{si } x^2 \neq y^2 \\ 0 & \text{si } x^2 = y^2 \end{cases} \end{array}$$

Exercice 3 (11 pts) On définit la fonction

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & (x^2+y^2)e^{x^2-y^2} \end{array}.$$

1. (9 pts) Déterminer les extréma locaux de la fonction f.
2. (2 pts) Etudier les extréma globaux de f sur $\mathbb{R}^2$ en justifiant votre réponse.