

---

**Kholle 7, le 19 avril 2011**

**Exercice 1 (Question de cours)**

- (i) (3 pts) Énoncer le théorème sur les extrémums liés avec dans  $\mathbb{R}^p$  et avec  $n$  contraintes.
- (ii) (3 pts) Indiquer lesquels des énoncés suivants sont vrais, lesquels sont faux ? Aucune justification n'est nécessaire.
1. La divergence d'un champ de vecteurs est un champ de vecteurs.
  2. Une fonction différentiable en un point a toutes ses dérivées directionnelles en ce point.
  3. Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ . En un point critique  $x \in \mathbb{R}^2$ , si la matrice hessienne  $Hf(x)$  est de trace strictement positive, alors  $f$  admet un maximum local en  $x$ .

**Exercice 2** (4 pts) On définit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x \ln y - y \ln x . \end{aligned}$$

Déterminer le polynôme de Taylor d'ordre 2 en  $(1, 1)$  de  $f$ .

**Exercice 3** (10 pts) On définit la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x^4 + 14x^2y^2 - 7y^4 - 4x + 6 . \end{aligned}$$

1. (8 pts) Déterminer les extrémums locaux de la fonction  $f$ .
2. (2 pts) Étudier les extrémums globaux de  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$  en justifiant votre réponse.