
Kholle 7, le 19 avril 2011

Exercice 1 (Question de cours)

(i) (3 pts) Soit $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^p)$ ($p \in \mathbb{N}^*$). Énoncer des conditions suffisantes pour que f admette un minimum local en un point $u \in \mathbb{R}^p$.

(ii) (3 pts) Indiquer lesquels des énoncés suivants sont vrais, lesquels sont faux ? Aucune justification n'est nécessaire.

1. Un maximum global est nécessairement un maximum local.
2. La différentielle d'une application linéaire est une fonction constante.
3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en tout point de \mathbb{R} . Si K est un fermé de \mathbb{R} , alors f atteint ses bornes sur K .

Exercice 2 (3 pts) On définit $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ ($p \in \mathbb{N}^*$) par $f(x) = \langle x, x \rangle$ ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^p). Montrer qu'en tout point $a \in \mathbb{R}^p$, $df(a).h = 2 \langle a, h \rangle$

Exercice 3 (11 pts) On définit la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto (x^4 + y^4)e^{-(x^2+y^2)} \end{aligned}$$

1. (9 pts) Déterminer les points critiques de f et les matrices Hessiennes qui leur correspondent (*Utiliser le fait que $f(x, y) = f(y, x)$ pour simplifier les calculs*). Quels sont les points d'extréma locaux ? Quels sont les points inconclusifs ?
2. (2 pts) Montrer qu'aux points inconclusifs f n'admet pas d'extrémum (*Utiliser la restriction $f(x, 0)$ et la symétrie susmentionnée*).