Kholle 7, le 19 avril 2011

Exercice 1 (Question de cours)

(i) (3 pts) Soit $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un compact K de $\mathbb{R}^p$. Enoncer le théorème sur les points de K en lesquels f peut atteindre ses extréma.

(ii) (3 pts) Indiquer lesquels des énoncés suivants sont vrais, lesquels sont faux ? Aucune justification n'est nécessaire.

1. Le gradient en un point est colinéaire à la droite tangente à une courbe de niveau en ce point.
2. La divergence est un opérateur linéaire.
3. Le rotationnel associe à tout champ de vecteurs différentiable dans $\mathbb{R}^3$ un nouveau champ de vecteurs.

Exercice 2 (3 pts) Soit f une fonction différentiable de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$. On pose $g(x,y) = f(y,x)$. En un point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, déterminer la matrice jacobienne de g en fonction de celle de f.

Exercice 3 (11 pts) On définit la fonction

$$f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (x^2+y^2)e^{x^2-y^2} \end{array} .$$

1. (9 pts) Déterminer les extréma locaux de la fonction f.
2. (2 pts) Etudier les extréma globaux de f sur $\mathbb{R}^2$ en justifiant votre réponse.