Kholle 8, le 3 mai 2011

Exercice 1 (Question de cours)
(i) (3 pts) Qu'est-ce qu'un champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^p$? Définir l'opérateur ∇ dans $\mathbb{R}^p$.
(ii) (3 pts) Indiquer lesquels des énoncés suivants sont vrais, lesquels sont faux ? Aucune justification n'est nécessaire.

1. Le rotationnel d'un champ de vecteurs est orthogonal à la direction déterminée par ce champ.
2. La matrice hessienne d'une fonction $\mathcal{C}^2$ est inversible.
3. Une fonction dont les dérivées partielles sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert non vide est $\mathcal{C}^1$ sur cet ouvert.

Exercice 2 (5 pts) On définit la fonction

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & (x^2-y)(3x^2-y) \end{array}$$

1. (3 pts) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'application $g_\lambda(x) = f(x, \lambda x)$ admet un minimum local en 0.
2. (2 pts) Vérifier si f admet un extrémum local en $(0,0)$.

Exercice 3 (4 pts) On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on considère la fonction suivante :

$$\begin{array}{cccc} t & : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & A & \longmapsto & \mathrm{tr}(A) \end{array} .$$

Vérifier que cette application est différentiable et déterminer sa différentielle.

Exercice 4 (5 pts) Déterminer les extréma locaux de la fonction suivante :

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & 2x^3+6xy-3y^2+2 \end{array} .$$