

---

**Kholle 8, le 3 mai 2011**

**Exercice 1 (Question de cours)**

(i) (3 pts) Donner la définition d'un champ de vecteurs. Donner la définition d'un champ de gradient.

(ii) (3 pts) Indiquer lesquels des énoncés suivants sont vrais, lesquels sont faux ? Aucune justification n'est nécessaire.

1. La divergence d'un champ de vecteurs est un champ de vecteurs.
2. Une fonction différentiable en un point a toutes ses dérivées directionnelles en ce point.
3. Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ . En un point critique  $x \in \mathbb{R}^2$ , si la matrice hessienne  $Hf(x)$  est de trace strictement positive, alors  $f$  admet un maximum local en  $x$ .

**Exercice 2** (4 pts) On définit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \ln(1 + x + 2y) . \end{aligned}$$

1. (1 pt) Déterminer le domaine de la fonction  $f$ .
2. (3 pts) Déterminer le polynôme de Taylor d'ordre 2 de  $f$  en  $(0, 0)$ .

**Exercice 3** (10 pts) On définit la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x^4 + 14x^2y^2 - 7y^4 - 4x + 6 . \end{aligned}$$

1. (8 pts) Déterminer les extréma locaux de la fonction  $f$ .
2. (2 pts) Etudier les extréma globaux de  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$  en justifiant votre réponse.