

Kholle 8, le 3 mai 2011

Exercice 1 (Question de cours)

- (i) (3 pts) Énoncer le théorème de Poincaré pour les champs de vecteurs en dimension 3.
- (ii) (3 pts) Indiquer lesquels des énoncés suivants sont vrais, lesquels sont faux ? Aucune justification n'est nécessaire.
1. Le gradient en un point est colinéaire à la droite tangente à une courbe de niveau en ce point.
 2. La divergence est un opérateur linéaire.
 3. Le rotationnel associe à tout champ de vecteurs différentiable dans \mathbb{R}^3 un nouveau champ de vecteurs.

Exercice 2 (3 pts) Soit f une fonction différentiable de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R} . On pose $g(x, y) = f(y, x)$. En un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, déterminer la matrice jacobienne de g en fonction de celle de f .

Exercice 3 (11 pts) On définit la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto (x^2 + y^2)e^{x^2 - y^2}. \end{aligned}$$

1. (9 pts) Déterminer les extréma locaux de la fonction f .
2. (2 pts) Étudier les extréma globaux de f sur \mathbb{R}^2 en justifiant votre réponse.