Kholle 9, le 10 mai 2011

Exercice 1 (Question de cours)

(i) (3 pts) Qu'est-ce qu'un champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^p$? Pour une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, donner des conditions suffisantes sur f et D pour que f soit intégrable sur D.

(ii) (3 pts) Indiquer lesquels des énoncés suivants sont vrais, lesquels sont faux ? Aucune justification n'est nécessaire.

1. Le rotationnel d'un champ de vecteurs est orthogonal à la direction déterminée par ce champ.
2. La matrice hessienne d'une fonction $\mathcal{C}^2$ est inversible.
3. Une forme exacte est nécessairement fermée.

Exercice 2 (5 pts) On définit la fonction

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & (x^2-y)(3x^2-y) \end{array}$$

1. (3 pts) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'application $g_\lambda(x) = f(x, \lambda x)$ admet un minimum local en 0.
2. (2 pts) Vérifier si f admet un extrémum local en $(0,0)$.

Exercice 3 (4 pts) On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on considère la fonction suivante :

$$\begin{array}{rccl} \wedge & : & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (u,v) & \longmapsto & u \wedge v \quad . \end{array}$$

Vérifier que cette application est différentiable et déterminer sa différentielle.

Exercice 4 (5 pts) On définit

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{P} & : & \mathbb{R}_+^* \times]0,2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_+ \times \{0\} \\ & & (r,t) & \longmapsto & (r\cos t, r \sin t) \quad . \end{array}$$

1. (2 pts) Montrer, en utilisant seulement la définition de la dérivée d'une fonction d'une seule variable, que la fonction $t \mapsto \cos(t)$ est une fonction dérivable pour tout $t \in \mathbb{R}$.
(*Aide-mémoire* : $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.)
2. (3 pts) Montrer que $\mathcal{P}$ est différentiable sur son domaine et déterminer sa différentielle (*Pour la différentiabilité, vous êtes libre d'utiliser la méthode qui vous convient le plus*).