Kholle 9, le 10 mai 2011

Exercice 1 (Question de cours)

(i) (3 pts) Soit $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Donner la définition d'un point critique. Donner la définition d'un minimum local.

(ii) (3 pts) Indiquer lesquels des énoncés suivants sont vrais, lesquels sont faux ? Aucune justification n'est nécessaire.

1. Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie quarrable du plan. Si l'ensemble des points de discontinuité de f est d'aire nulle, alors f est intégrable sur D.
2. Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ en un point est nécessairement différentiable en ce point.
3. Le rotationnel est un opérateur linéaire.

Exercice 2 (11 pts) On définit

$$\begin{array}{rcccl} \mathcal{S} & : & \mathbb{R}_+^* \times]0,\pi[\times]0,2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R} \\ & & (\rho,\phi,t) & \longmapsto & (\ \rho\ \sin\phi\ \cos t\ ,\ \rho\ \sin\phi\ \sin t\ ,\ \rho\ \cos\phi\ )\quad . \end{array}$$

1. (2 pts) Montrer que $\mathcal{S}$ est une bijection.
2. (4 pts) Montrer que $\mathcal{S}$ est différentiable sur son domaine et déterminer sa différentielle.
3. (3 pts) Déterminer la divergence et le rotationnel de $\mathcal{S}$.
4. (2 pts) Déterminer si $\mathcal{S}$ est un champ de gradient ?

Exercice 3 (3 pts) On définit la fonction

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & x^4 + 14x^2y^2 - 7y^4 - 4x + 6\ . \end{array}$$

Déterminer les points critiques de la fonction f.