Kholle 9, le 10 mai 2011

Exercice 1 (Question de cours)
(i) (3 pts) Donner la définition de la divergence d'un champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^p$. Donner la définition du rotationnel d'un champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$.
(ii) (3 pts) Indiquer lesquels des énoncés suivants sont vrais, lesquels sont faux ? Aucune justification n'est nécessaire.

1. Une k-forme linéaire est antisymétrique.
2. La différentielle d'une fonction linéaire est une fonction constante.
3. Soit F une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^p$. Si $dF(X) = 0$, alors F atteint un extrémum en X.

Exercice 2 (3 pts) Etudier la continuité de la fonction suivante en tout point de la forme (a, a) ou $(a, -a)$:

$$\begin{array}{cccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2-y^2} & \text{si } x^2 \neq y^2 \\ 0 & \text{si } x^2 = y^2 \end{cases} \end{array}$$

Exercice 3 (8 pts)

$$\begin{array}{cccl} \mathcal{C} & : & \mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[\times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R} \\ & & (r,t,z) & \longmapsto & (\, r \ \sin t \ , r \ \cos t \ , \ z\,) \ . \end{array}$$

1. (3 pts) Montrer que $\mathcal{C}$ est différentiable sur son domaine et déterminer sa différentielle.
2. (3 pts) Déterminer la divergence et le rotationnel de $\mathcal{C}$.
3. (2 pts) Déterminer si $\mathcal{C}$ est un champ de gradient ?

Exercice 4 (3 pts) On définit la fonction

$$\begin{array}{cccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & (x^2+y^2)e^{x^2-y^2} \ . \end{array}$$

Déterminer les points critiques de la fonction f.