
Kholle 9, le 10 mai 2011

Exercice 1 (Question de cours)

(i) (3 pts) Donner la définition d'une k-forme antisymétrique. Donner la définition d'un champ de gradient.

(ii) (3 pts) Indiquer lesquels des énoncés suivants sont vrais, lesquels sont faux ? Aucune justification n'est nécessaire.

1. La divergence d'un champ de vecteurs est un champ de vecteurs.
2. Si ω est une forme différentielle, alors $\omega \wedge \omega = 0$.
3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. En un point critique $x \in \mathbb{R}^2$, si la matrice hessienne $Hf(x)$ est de trace strictement positive, alors f admet un maximum local en x.

Exercice 2 (5 pts) On définit

$$\begin{array}{rclcl} \mathcal{P} & : & \mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_+ \times \{0\} \\ & & (r, t) & \longmapsto & (r\cos t, r\sin t) \end{array} .$$

1. (2 pts) Montrer, en utilisant seulement la définition de la dérivée d'une fonction d'une seule variable, que la fonction $t \mapsto \sin(t)$ est une fonction dérivable pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (*Aide-mémoire* : $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.)
2. (3 pts) Montrer que $\mathcal{P}$ est différentiable sur son domaine et déterminer sa différentielle (*Pour la différentiabilité, vous êtes libre d'utiliser la méthode qui vous convient le plus*).

Exercice 3 (9 pts) On définit la fonction

$$\begin{array}{rclcl} \Phi & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (x, y) & \longmapsto & (u, v) \end{array} ,$$

avec $u(x, y) = x + y$ et $v(x, y) = xy$.

1. (2 pts) Vérifier que Φ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer sa matrice jacobienne en un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. (2 pts) Déterminer l'ensemble $\mathcal{R}$ des points où la matrice jacobienne de Φ est inversible. Déterminer cet inverse en fonction de x et de y.
3. (3 pts) En considérant les racines du polynôme $T^2 - uT + v$, exprimer (x, y) en fonction de u et v. Déterminer les points (x, y) pour lesquels la solution est unique.
4. (2 pts) Déterminer l'inverse de la matrice jacobienne, quand celle-ci est inversible, en fonction de u et de v.