Kholle 9, le 10 mai 2011

Exercice 1 (Question de cours)

(i) (3 pts) Soit $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^p)$ ($p \in \mathbb{N}^*$). Enoncer des conditions suffisantes pour que f admette un minimum local en un point $u \in \mathbb{R}^p$.

(ii) (3 pts) Indiquer lesquels des énoncés suivants sont vrais, lesquels sont faux ? Aucune justification n'est nécessaire.

1. Une fonction $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert y a un nombre fini de points extrémaux.
2. La différentielle d'une application linéaire est une fonction constante.
3. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en tout point de $\mathbb{R}$. Si K est un fermé de $\mathbb{R}$, alors f atteint ses bornes sur K.

Exercice 2 (3 pts) On définit $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ ($p \in \mathbb{N}^*$) par $f(x) =< x, x >$ ($<\ ,\ >$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^p$). Montrer qu'en tout point $a \in \mathbb{R}^p$, $df(a).h = 2 < a, h >$

Exercice 3 (11 pts) On définit la fonction

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & (x^4 + y^4 + 1)e^{-(x^2+y^2)} \end{array}$$

1. (9 pts) Déterminer les points critiques de f et les matrices Hessiennes qui leur correspondent (*Utiliser le fait que $f(x, y) = f(y, x)$ pour simplifier les calculs*). Quels sont les points d'extréma locaux ? Quels sont les points inconclusifs ?
2. (2 pts) Montrer qu'aux points inconclusifs f n'admet pas d'extrémum (*Utiliser la restriction $f(x, 0)$ et la symétrie susmentionnée*).